Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

Feuille d'exercices N°1

Séries numériques

Exercice 1

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$.
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$.
3. $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$
8. $u_n = \dfrac{n+1}{2^n+8}$
9. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^n)}$
10. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.
11. $u_n = a^n\, n!,\ a \in \mathbb{R}_+$.
12. $u_n = n\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.
13. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$.
14. $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^{2n}-1)}$.
15. $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

Exercice 2

Ranger, en justifiant, les séries qui suivent en quatre catégories :

GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 .

ZD : celles qui divergent, mais et dont le terme général tend vers 0 .

AC : celles qui convergent absolument.

SC : celles qui convergent, mais non absolument.

Remarque : ***SC*** et ***ZD*** demandent deux démonstrations : par exemple, pour ranger une série $\sum u_n$ dans la catégorie ***SC***, il faut prouver que $\sum u_n$ converge, et que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum\left(\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)\ ;\ \sum\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\,\frac{1}{3^{n-k}}\right)\ ;\ \sum\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ ;\ \sum\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)\ ;\ \sum\frac{2^n+2023}{3^n}\ ;\ \sum\frac{n!}{n^n}\ ;$$

$$\sum\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right);\ \sum\left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right),\ \sum\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\ ;\ \sum\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right).$$

Exercice 3

Nature, et le cas échéant somme, de la série $\sum u_n$, dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$.
2. $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$.
3. $u_n = \dfrac{2n^3+3n+1}{2^{n+1}}$

Exercice 4

Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? On demande à chaque fois une justification courte.

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge.

2. La série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ converge.

3. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ divergent.

4. La somme de deux séries divergentes est divergente.

5. Si $u_n = o\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, la série $\sum u_n$ converge.

6. Si la série $\sum u_n$ converge, la suite (u_n) converge.

7. Si la série $\sum u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum |u_n|$.

8. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

9. Si $\dfrac{1}{n} = o(u_n)$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

10. La valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ est comprise entre 0 et 1.

11. La série $\sum \dfrac{\ln^2(n)}{n\sqrt{n}}$ converge.

12. Si la série $\sum u_n$ converge et si $\forall\ n,\ u_n \geq 0$, alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

13. Si $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, la série $\sum u_n$ converge.

14. Si (u_n) est une suite positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

15. Si la suite (u_n) est à valeurs positives et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

16. Si les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent, alors la série $\sum u_n$ converge.

17. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à terme général positif et convergent, alors il en est de même de la série $\sum \max(u_n, v_n)$.

18. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_{2n}$ converge.

19. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

20. La somme de deux séries à termes positifs divergentes est divergente.

21. Si (u_n) est une suite positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < \dfrac{1}{2} u_n$, alors la série $\sum u_n$ converge.

22. Si la série $\sum u_n$ diverge, la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

23. Si la série $\sum |u_n|$ diverge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

Exercice 5

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \arccos\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 6

Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

Exercice 7

Soit a un réel strictement positif fixé. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 8

Etudier les séries de terme général suivant :

1. $u_n = \frac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$.

2. $u_n = \frac{n^{\alpha}(\ln n)^n}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $u_n = \frac{(n!)^{\alpha}}{(2n)!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

Donner la nature des séries de terme général suivant :

1. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

2. $u_n = \exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$.

3. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Exercice 10

Discuter, suivant la valeur des paramètres, de la nature des séries de terme général suivant :

1. $u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^{\alpha}}$.

2. $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

3. $u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$.

Exercice 11

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par : $\begin{cases} u_0 \in [0, \pi] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \end{cases}$ converge vers 0.

2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 12

Déterminer $\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 13

Suivant la valeur de a, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n^a}$.

Exercice 14*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{\sin(\ln(n))}{n}$ et $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln(t))}{t}\,dt$.

1. Montrer que les séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Déterminer celle-ci.

Exercice 15

1. Montrer que pour tout n entier strictement positif : $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\cos nt \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2m+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

3.a. Soit f une application de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = 0$.

b. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. En déduire enfin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 16

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n$. *On pourra penser aux sommes de Riemann.*

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} = a_n$.

3. Retrouver alors la somme de la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{k \geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 17

Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} u_n$.

Exercice 18

Etudier la nature de la série de terme général $\displaystyle u_n = \prod_{q=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right)$.

Exercice 18

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par : $\forall\, n \geq 1,\ u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} v_n$ convergent, et que la série produit de Cauchy de ces deux séries est divergente.

Exercice 20

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que :

a. $\dfrac{1}{(a-1)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a^n$.

a. $\dfrac{1}{(a-1)(b-1)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$.

Exercice 21

1. Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}$.

a. Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?

b. Montrer que la suite $(n\, u_n)$ est croissante. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}$.

a. Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?

b. Montrer que la suite $\left(n^{5/4}\, u_n\right)$ est décroissante. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 22

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, a_k$.

Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$.

1. Déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre A_n, B_n, et b_n.

2. Montrer que les séries numériques $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} b_n$ sont de même nature. En cas de convergence, comparer leurs sommes.

Exercice 23

Sur la série des restes d'une série convergente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs telle que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$ en fonction de n et de R_n.

2. Montrer que si la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$ converge.

3. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$ converge. Que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (n+1)\, R_n$?

4. En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 0} R_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\, u_n$ sont de même nature, et, qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

Exercice 24

1. Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.

2. Calculer sa somme.

Exercice 25

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n): $x\,\mathrm{e}^{nx} = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette équation admet une unique solution réelle x_n.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et déterminer cette limite.

3. Déterminer la nature des séries numériques $\sum x_n$ et $\sum x_n^2$.

4. Donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 26

Soit f une application de classe C^1 sur $[0, 1]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

2. Etudier la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 27

Test de condensation de Cauchy

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de nombres réels positifs ou nuls. En considérant des sommes du type $\sum_{k=1}^{10^n} u_k$ et $\sum_{k=10^n+1}^{10^{n+1}} u_k$, montrer que les séries $\sum_{k \geq 1} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} 10^k u_{10^k}$ sont de même nature.

2. ***Application 1***

Déterminer, suivant la valeur du réel $\alpha > 0$, la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ puis $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

3. ***Application 2***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si l'écriture décimale de } n \text{ comporte le chiffre } 9 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} u_k$.

Exercice 28

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

1. On suppose que l'on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n assez grand, et que $\sum v_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2. ***Règle de Raabe – Duhamel***

On suppose qu'il existe un réel $A > 1$ tel que pour tout n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{A}{n}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

3. On suppose que pour tout n assez grand, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 29

Transformation d'Abel

Soit $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.

1. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_n b_n$.

2. On suppose que :

- La suite $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

•• La suite $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

a_ Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right)$ converge absolument.

b_ En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

3. ***Application.*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$.

Exercice 30

Soit la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \left]-1, 0\right[\\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto x + x^2$. Montrer la stabilité de l'intervalle $\left]-1, 0\right[$ par f. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]-1, 0\right[$.

2. Montrer que $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge, et exprimer sa somme en fonction de u_0.

4. Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $\sum u_n x^n$ converge.

5. Etudier la série $\sum \left(-1\right)^n u_n$.

6. On pose $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Montrer que $\left(a_n\right)$ converge vers une limite ℓ.

7. On admet que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} a_p = \ell$. En déduire un équivalent de u_n.

8. Démontrer le résultat admis en question **7.** .

Exercice 31

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $S_n = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{p\,q}{p+q}$.

1. Montrer que la suite $\left(H_n - \ln\left(n+1\right)\right)_{n \geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

2.a. Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \left\{1\right\}$, calculer $\delta_n = S_n - S_{n-1}$ en fonction de certains des H_k.

2.b. Déterminer un équivalent de δ_n lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de S_n.

Exercice 32

1. Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$.

2. Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n \in 2\,\mathbb{N}$.

En déduire la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice 33

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 34

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}\,u_n.$$

1. Etudier la convergence de (u_n), et déterminer sa limite. *On pourra étudier la suite* $(\ln(u_n))$.

2. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $u_n \sim \frac{M}{n^{b-a}}$. *On pourra étudier* $n^\alpha u_n$.

3. Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 35

1. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et par la relation de

récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$.

Montrer qu'il existe un unique α tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ***non nul***.

3. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 36

A l'aide de produits de Cauchy, calculer : **1.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,3^{-n}$. **2.** $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\,3^{-n}$.

Exercice 37

Soit x un réel. On admet que la série $\sum \frac{x^i}{i!}$ converge, et que $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \mathrm{e}^x$.

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{x^j}{i!\,j!}$.