DM N°1

Pour le 13/09

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème, indépendants

Exercice : critère de condensation de Cauchy

On considère une série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ avec (a_n) réelle **décroissante positive**. On se propose de démontrer le critère dit de condensation de Cauchy :

La série numérique $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$ [1] *converge et on a, dans le cas de convergence, en notant S et T les sommes respectives, l'encadrement $S \leqslant T \leqslant 2S$.*

On note S_n et T_n les sommes partielles d'ordre n des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$ respectivement.

1. (*) Montrer que
$$S_7 \leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 = T_2 \qquad 2S_4 \geqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 = T_2$$
2. (**) En généralisant la méthode ci-dessus, montrer que
$$S_{2^n-1} \leqslant T_n \qquad ; \qquad 2S_{2^n} \geqslant T_n$$
3. (***) En déduire le critère de condensation.
4. (**) Application : on considère la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ (on ne suppose pas connu ici la nature de cette série de cours).

   Vérifier les hypothèses du critère de condensation et montrer que la série de Riemann converge si et seulement si la série
$$\sum_{n\geqslant 0} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$$
   est convergente. En déduire la nature de la série de Riemann selon les valeurs de α.
5. (**) Étudier de même la nature de la série dite de Bertrand
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$$

1. bien lire « 2 puissance n »

Problème

Dans la première partie, on établit des résultats généraux, qui pourront être utilisés dans la seconde partie, mêmes s'ils n'ont pas été démontrés. On n'oubliera pas, à chaque fois que l'on utilise un résultat, d'en vérifier les hypothèses.

Première partie

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à valeurs réelles, la série $\sum v_n$ étant à termes positifs.

1. On suppose dans cette question que la série $\sum v_n$ est convergente et que $u_n \in o(v_n)$.

a) Justifier que la série $\sum u_n$ est convergente.

On peut donc parler, pour tout entier n, des restes de ces séries convergentes, notés $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

b) Démontrer que $R_n \in o(T_n)$.

Indication : à $\varepsilon > 0$ fixé, on pourra commencer par justifier l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n| \leqslant \varepsilon v_n$.

2. Dans cette question, on suppose encore que la série $\sum v_n$ est convergente. On suppose aussi que $u_n \sim v_n$. Après avoir justifié que la série $\sum u_n$ est convergente, démontrer que $R_n \sim T_n$ (avec les notations de la question précédente). On pourra pour cela remarquer que la relation $u_n \sim v_n$ s'écrit aussi $u_n - v_n \in o(v_n)$.

3. On suppose dans cette question que la série $\sum v_n$ est divergente et que $u_n \in o(v_n)$. On note U_n et V_n les sommes partielles d'ordre n des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement.

a) Quelle est la limite de V_n lorsque n tend vers ∞ ? Peut-on dire quelque chose à propos de U_n ?

b) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} v_k.$$

c) En déduire que $U_n \in o(V_n)$.

4. On suppose enfin que la série $\sum v_n$ diverge et que $u_n \sim v_n$. Démontrer que $U_n \sim V_n$.

5. *Exemple : série harmonique*

En remarquant que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, retrouver que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

6. *Un deuxième exemple*

Pour tout entier n, on pose $x_n = \frac{1}{n!}$.

a) Déterminer un équivalent de $x_n - x_{n+1}$.

b) En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

7. *Un troisième exemple*

a) Démontrer que la série $\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{\ln k}$ diverge.

b) Vérifier que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k} = \frac{n+1}{\ln n} + \sum_{k=3}^{n} k \left[\frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln k} \right] - \frac{2}{\ln 2}$$

(pour $n = 2$, la somme $\sum_{k=3}^{n} \cdots$ ne contient aucun terme ; sa valeur est nulle).

c) Démontrer que

$$\sum_{k=3}^{n} k \left[\frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln k} \right] \in o\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k} \right),$$

en déduire un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère une suite $(u_n)_n$ à valeurs strictement positives et on suppose l'existence d'un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Démontrer que $\dfrac{\ln u_n}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\alpha$. On pourra traiter séparément les cas $\alpha \neq 0$ et $\alpha = 0$.

2. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a) Soit β un réel appartenant à l'intervalle $]1, \alpha[$. Démontrer que

$$\frac{\ln(n^\beta u_n)}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha.$$

b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

c) Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, on a l'équivalent

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \frac{n u_n}{\alpha - 1}.$$

Indication : on pourra s'intéresser à la série de terme général $v_n - v_{n+1}$, où $v_n = \frac{n u_n}{\alpha - 1}$.

d) Soit $\gamma > 1$. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\gamma}$ lorsque $n \to \infty$.

e) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Retrouver, grâce à cet encadrement, le résultat de la question précédente dans le cas particulier $\gamma = 2$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha < 1$.

a) Démontrer que la série $\sum u_n$ est divergente.

b) Démontrer que, lorsque n tend vers l'infini, on a l'équivalent

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \frac{n u_n}{1 - \alpha}.$$

c) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\gamma}$ pour $\gamma < 1$.

d) Démontrer que, pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

et retrouver l'équivalent précédent dans le cas particulier $\gamma = \frac{1}{2}$.

4. On suppose dans cette dernière question que le développement asymptotique s'écrit en fait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$.

a) Démontrer que l'on a le développement asymptotique

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) Démontrer que la série $\sum \left(\ln v_{n+1} - \ln v_n\right)$ est convergente.

c) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?