Lycée Lakanal

2025- 2026

PC

Série numériques :

Corrigés

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

α_ Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$. On décompose la fraction rationnelle

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)}$ en éléments simples, et l'on cherche donc α, β, γ tels que :

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+3}$. On obtient :

$\frac{1}{X(X+1)(X+3)} = \frac{1/3}{X} - \frac{1/2}{X+1} + \frac{1/6}{X+3}$.

Par suite, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{k+3} \right)$. Après séparation des sommes, et changements d'indices :

$S_n = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{6}\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k}$, soit en notant $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:

$S_n = \cancel{\frac{1}{3} H_n} - \frac{1}{2}\left(-1 + \cancel{H_n} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{6}\left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cancel{H_n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$, ou encore :

$S_n = \frac{7}{18} + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Finalement, $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{7}{18}$, ce qui revient à dire que la série $\sum u_n$ converge, et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{7}{18}$.

β_ Posons, pour tout $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$. On a

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k) \right)$. A nouveau, on sépare les sommes, et l'on change d'indice dans les deux premières d'entre elles.

$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n-1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$,

Et donc : $S_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(n) \right) + \left(-\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \ln k + \ln(n+1) \right) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$.

Finalement, $S_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(n)\right) + \left(-\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \ln k + \ln(n+1)\right) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$, soit :

$S_n = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Par passage à la limite : la série $\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

χ_ Posons pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k!} && \text{terme d'indice } 1 \text{ nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{k!} && \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1) + 3k + 1}{k!} && \text{arrangement du numérateur en vue de simplifications ultérieures} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{k!} + 3\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} && \text{supression de termes nuls} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-2)!} + 3\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

La série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge, et sa somme vaut e. On en déduit que $\lim S_n = 5\,\mathrm{e}$:

$\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 5\,\mathrm{e}$.

δ_ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}\right)$. La formule $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

donne alors $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\arctan(k+1) - \arctan(k)\right)$, d'où par télescopage, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \arctan(n+1) - \arctan(1)$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$: $\sum u_n$ converge, et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4

Exercice 5

$\frac{n-1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$, donc, par continuité de la fonction arccos, la suite (u_n) converge vers $\arccos(1) = 0$.

On peut dès lors, en utilisant le développement limité à l'ordre 2 de cos, écrire que : $\cos(u_n) = 1 - \frac{u_n^{\ 2}}{2} + o(u_n^{\ 2})$.

D'autre part, $\cos(u_n) = \cos\left(\arccos\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = \frac{n-1}{n}$.

On a donc $1 - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right) = 1 - \frac{1}{n}$, d'où : $u_n^2 \sim \frac{2}{n}$. Comme u_n est positif (c'est un arccosinus) ; il en résulte que $u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. Par comparaison à une série de Riemann (divergente) : la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

Exercice 6

On pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

- On vérifie immédiatement avec le théorème spécial des séries alternées que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

- Ensuite : $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}$, d'où :

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\right)\right) = u_n - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

  Autrement dit, $u_n - v_n \sim \frac{1}{n}$. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et est à terme général positif, donc $\sum_{n \geq 1} \left(u_n - v_n\right)$ diverge. La convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$ permet d'en conclure que $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge.

Exercice 7

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a^{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$.

On sait (et l'on sait démontrer !) que : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler.

On en déduit que $u_n = a^{\ln(n) + \gamma + o(1)}$, soit $u_n \sim a^\gamma a^{\ln(n)} = a^\gamma n^{\ln(a)}$.

Par comparaison à la série de Riemann $\sum n^{\ln(a)}$: $\sum u_n$ converge si et seulement si $\ln(a) < -1$, c'est-à-dire si et seulement si $a < \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 8

Exercice 9

Exercice 10

Exercice 11

1. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par : $\begin{cases} u_0 \in [0, \pi] \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos\left(u_n\right) \end{cases}$ converge vers 0.

2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

1. Soit $f : x \mapsto 1 - \cos(x)$.

Exercice 12

Exercice 15

1. Montrer que pour tout n entier strictement positif : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t \right) \cos nt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$

On a par intégrations par parties :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t \right) \cos nt \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t \right) \sin nt \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} t - 1 \right) \sin nt \, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{\pi} t \right) \sin nt \, \mathrm{d}t$$

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{(2m+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$.

3.a. Soit f une application de classe C^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin \lambda t \, \mathrm{d}t = 0$.

b. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{2\pi} t^2 - t}{\sin \frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. En déduire enfin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 16

1. On a $\displaystyle a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où f est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$. f est continue sur le segment $[0, 1]$, le résultat du cours concernant les sommes de Riemann s'applique donc, et assure que $\displaystyle\lim a_n = \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t$, soit

$$\lim a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2 .$$

2. Procédons par récurrence. On a $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Si on la suppose vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$: d'une part :

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{n+j},$$

ce qui donne $a_{n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + a_n$. D'autre part :

$$S_{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Comme par hypothèse de récurrence $S_{2n} = a_n$, on en conclut que $S_{2(n+1)} = a_{n+1}$, et ceci achève la récurrence.

3. D'après **2.** et **1.**, on a $\lim S_{2n} = \lim a_n = \ln 2$. Il est alors clair qu'également $\lim S_{2n+1} = \ln 2$, puisque $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} 0$. Les suites des termes d'indices pairs et impairs de la suite (S_n) convergeant vers une même limite, (S_n) converge elle aussi vers cette limite. Cela revient à dire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 17

1. • On s'inspire du critère de comparaison série/intégrale, même si on l'applique ici à une fonction qui n'est pas décroissante : $g : t \mapsto (\ln t)^2$ est croissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout entier $k \geq 2$:

pour tout $t \in [k-1, k]$, $(\ln t)^2 \leq (\ln k)^2$, et pour tout $t \in [k, k+1]$, $(\ln k)^2 \leq (\ln t)^2$. On en déduit par croissance de l'opérateur intégral que $\int_{k-1}^{k} (\ln t)^2 \, dt \leq \int_{k-1}^{k} (\ln k)^2 \, dt$ et $\int_{k}^{k+1} (\ln t)^2 \, dt \leq \int_{k}^{k+1} (\ln t)^2 \, dt$, d'où :

$$\int_{k-1}^{k} (\ln t)^2 \, dt \leq (\ln k)^2 \leq \int_{k}^{k+1} (\ln t)^2 \, dt.$$

On a alors pour tout $n \geq 2$: $\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} (\ln t)^2 \, dt \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2 \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} (\ln t)^2 \, dt$, puis, en utilisant la relation de Chasles : $\int_{1}^{n} (\ln t)^2 \, dt \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2 \leq \int_{2}^{n+1} (\ln t)^2 \, dt$.

•• Pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on peut calculer l'intégrale $\int_a^b (\ln t)^2 \, dt = \int_a^b 1.(\ln t)^2 \, dt$ à l'aide d'une intégration par parties : les fonctions $u : t \mapsto (\ln t)^2$, $v : t \mapsto \sin t$ sont de classe C^1, et pour tout réel $t \in \mathbb{R}^{+*}$: $u'(t) = \frac{2 \ln t}{t}$, $v'(1) = 1$. Comme $\int_a^b (\ln t)^2 \, dt = \int_a^b v'(t) \, u(t) \, dt \, dt$, l'intégration par parties est légale, et il vient

$$\int_a^b (\ln t)^2 \, dt = [v(t) u(t)]_a^b - \int_a^b v(t) \, u'(t) \, dt = \left[t (\ln t)^2 \right]_a^b - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln t \, dt$$
$$= \left[t (\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t \right]_a^b.$$

Ainsi, $\left[t (\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t \right]_1^n \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2 \leq \left[t (\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t \right]_2^{n+1}$, soit :

$$n(\ln n)^2 - 2n\ln n + 2n - 2 \leq \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2$$
$$\leq (n+1)(\ln(n+1))^2 - 2(n+1)\ln(n+1) + 2n - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 .$$

Enfin, $n(\ln n)^2 - 2n\ln n + 2n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$, et

$$(n+1)(\ln(n+1))^2 - 2(n+1)\ln(n+1) + 2n - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(\ln(n+1))^2$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2 ,$$

(*idiot mais vital : vérifiez que vous savez prouver* $(n+1)(\ln(n+1))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$ *proprement...*)

donc par encadrement : $\sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$.

Il en résulte que $\boxed{u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}}$.

2. Comme $\sum_{n\geq 2} u_n$ est à terme général positif, l'équivalence $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ assure que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est de même nature que la série (de Bertrand) $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$. On sait que cette dernière série converge, mais il faut le redémontrer : c'est donc parti pour une nouvelle louche de comparaison série / intégrale :

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, de dérivée $f' : t \mapsto -\dfrac{2+\ln t}{t^2(\ln t)^3}$, elle est donc décroissante sur cet intervalle. D'après le critère de comparaison séries / intégrales, $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ est donc de même nature que l'intégrale

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$. Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_2^{X} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{-1}{\ln t}\right]_2^X = \frac{1}{\ln 2}$:

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$ converge, et $\sum_{n\geq 2} u_n$ itou.

Exercice 18 bis

- La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le théorème spécial des séries alternées,

$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

•• Soit $\sum_{n\geq 2} w_n$ la série produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$. On a pour tout $n \geq 2$,

$w_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} u_k v_{n-k} = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k(n-k)}} = (-1)^n \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. Le maximum de la fonction $t \mapsto t(n-t)$ sur le segment $[0, n]$ est atteint en $\dfrac{n}{2}$ et il est égal à $\dfrac{n^2}{4}$, donc : $|w_n| \geq \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n} = \frac{2n-3}{n} \sim 2$. La suite (w_n) ne tend pas vers 0, le produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ est donc grossièrement divergent.

Exercice 36

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)3^{-n} = \sum_{k=0}^{n} 3^{-n} = \sum_{k=0}^{n} 3^{-k} 3^{-(n-k)}$. On reconnaît là le terme général de la série de Cauchy de la série $\sum_{n \geq 0} 3^{-n}$ avec elle – même. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} 3^{-n}$ converge absolument, on sait que $\sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$ converge aussi (toujours absolument), et que l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} \right)^2$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \right)^2 = \frac{9}{4}.$$

2. On recommence. En utilisant la formule $\sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$(n+1)(n+2)3^{-n} = 2\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)3^{-k} \right) 3^{-(n-k)}$. $\sum (n+1)(n+2)3^{-n}$ est donc le produit de Cauchy des séries $2\sum (n+1)3^{-n}$ et $\sum 3^{-n}$, qui sont toutes deux absolument convergentes. De ce fait $\sum (n+1)(n+2)3^{-n}$ converge absolument, et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)3^{-n} = 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} \right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} \right) = \frac{27}{4}$.

Exercice 22

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i a_i = \sum_{i=1}^{n} i a_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} i a_i \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

d'où par télescopage, $B_n = \sum_{i=1}^{n} i a_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i a_i$. Ainsi, $B_n = A_n - (n+1) b_n$.

2. Supposons la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ convergente, notons S sa somme. Les a_k étant positifs, la relation $B_n = A_n - (n+1) b_n$ assure que $B_n \leq A_n \leq S$. La série $\sum_{n \geq 1} b_n$ est à terme général positif et la suite de ses sommes partielles est majorée, donc cette série converge.

Supposons réciproquement que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge. Alors par propriété des restes d'une série convergente,

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k = 0$. Pour $k \geq n$,

$$b_k = \frac{1}{k(k+1)} \left(\sum_{j=1}^{n} j a_j + \sum_{j=n+1}^{k} j a_j \right) \geq \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{n} j a_j = \frac{n(n+1)}{k(k+1)} b_n \geq 0,$$

on en déduit que $\sum_{k \geq n} \frac{n(n+1)}{k(k+1)} b_n$ converge pour tout n, et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{k(k+1)} b_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Par un nouveau télescopage, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{k(k+1)} b_n = n(n+1) b_n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = (n+1) b_n$, donc $\lim_{n \to +\infty} (n+1) b_n = 0$; il ne reste alors plus qu'à passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ pour en déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, et que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Finalement, les séries $\sum_{n \geq 1} b_n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n$ sont de même nature, et, en cas de convergence, leurs sommes sont égales.

Exercice 23

1. On a pour tout $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k$:

$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{+\infty} u_j = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k+1}^{n} u_j + \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k+1}^{n} u_j + R_n \right)$, d'où

$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} u_j + (n+1) R_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} u_j + (n+1) R_n = \sum_{j=1}^{n} j u_j + (n+1) R_n$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1) R_n$.

2. Supposons la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ convergente, notons R sa somme. Les u_k étant positifs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\sum_{k=0}^{n} R_k \leq R$, et l'égalité $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1) R_n$ permet d'en déduire que l'on a aussi $\sum_{k=1}^{n} k u_k \leq R$.

$\sum_{n \geq 0} n u_n$ est à terme général positif et la suite de ses sommes partielles est majorée, donc $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge.

3. Supposons que $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge. Alors par propriété des restes d'une série convergente, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k = 0$.

Or $0 \leq (n+1) R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1) u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$. On en déduit, par encadrement, que $\lim_{n \to +\infty} (n+1) R_n = 0$.

4. On a montré que si $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, $\sum_{n \geq 0} n u_n$. Réciproquement, si $\sum_{n \geq 0} n u_n$, on a $\lim_{n \to +\infty} (n+1) R_n = 0$. En passant à la limite dans l'égalité $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1) R_n$, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, et que $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$. Finalement, les séries $\sum_{n \geq 0} R_n$ et $\sum_{n \geq 0} n u_n$ sont de même nature, et, en cas de convergence, elles ont la même somme.

Exercice 24

1. La suite $\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge.

2. Le CSSA ne permet évidemment pas d'obtenir la somme de la série considérée. Pour l'avoir, on passe comme d'habitude par des sommes partielles, en espérant peut-être, vue la situation, qu'elles seront télescopiques. En tous cas, on peut toujours essayer. On le fait et l'on obtient la chose suivante, en considérant par exemple les sommes partielles d'ordre pair :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2j} \ln\left(1 + \frac{1}{2j}\right) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2j-1} \ln\left(1 + \frac{1}{2j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+1}{2j}\right) - \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j}{2j-1}\right)$$ e

$$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+1}{2j}\right) + \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j-1}{2j}\right),$$

t mince ça ne se télescope pas. Pas grave, on va s'en tirer autrement. En réunissant tous les ln en un seul, on obtient :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} = \ln\left(\dfrac{1.3^2.5^2 \dots (2n-1)^2.(2n+1)}{(2.4\dots(2n))^2}\right)$, que l'on arrange suivant une méthode classique pour faire apparaître des factorielles :

$$S_{2n} = \ln\left(\frac{1.2^2\,3^2\,4^2 5^2 \dots (2n-1)^2 (2n)^2 (2n+1)}{(2.4\dots(2n))^4}\right) = \ln\left(\frac{((2n)!)^2 (2n+1)}{2^{4n}(n!)^4}\right).$$

Maintenant, la formule de Stirling donne : $\dfrac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4} \sim \dfrac{(2n)^{4n}\,\mathrm{e}^{-4n}\,4\pi n(2n+1)}{2^{4n}\,n^{4n}\,\mathrm{e}^{-4n}\,(2\pi n)^2}$, puis en simplifiant : $\dfrac{((2n)!)^2(2n+1)}{2^{4n}(n!)^4} \sim \dfrac{4\pi n(2n+1)}{(2\pi n)^2} \sim \dfrac{2}{\pi}$.

On en déduit que $\lim S_{2n} = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$. Comme $S_{2n+1} - S_{2n} = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n+1}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, on a aussi

$\lim S_{2n+1} = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$, et ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 26

1. La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée ; en notant M un majorant de $|f|$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} M\,\mathrm{d}t \leq M \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, et l'on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Bien entendu, la majoration précédente n'est pas suffisante pour déterminer la nature de $\sum u_n$. D'autre part, l'hypothèse « f est C^1 » de l'énoncé laisse penser qu'il serait judicieux d'intégrer par parties, en dérivant f. Le problème est qu'il faudrait alors intégrer $t \mapsto \dfrac{t^n}{1+t^n}$, ce qui est pénible. On contourne cette difficulté en remarquant que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{n-1}}{1+t^n}$ est, elle, facile à intégrer. On écrit donc que $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,(t\,f(t))\,\mathrm{d}t$, et on y va pour l'IPP (tout le monde est C^1).

On obtient $u_n = \dfrac{f(1)\ln 2}{n} - \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{n}\,(f(t) + t\,f'(t))\,\mathrm{d}t$.

Ensuite :

- La série $\sum \dfrac{f(1)\ln 2}{n}$ est divergente, sauf bien sûr si $f(1) = 0$.

- En notant K un majorant de la fonction continue $t \mapsto \left| f(t) + t f'(t) \right|$ sur le segment $[0,1]$:

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^n\right)}{n} \left(f(t) + t f'(t) \right) \mathrm{d}t \right| \leq K \int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^n\right)}{n} \, \mathrm{d}t ,$$

Puis en utilisant la majoration classique (et facile à démontrer) : $\ln(1+X) \leq X$, il vient :

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^n\right)}{n} \left(f(t) + t f'(t) \right) \mathrm{d}t \right| \leq K \int_0^1 \frac{t^n}{n} \, \mathrm{d}t = \frac{K}{n(n+1)} \leq \frac{K}{n^2} .$$

Ainsi, par comparaison à une série de Riemann, $\sum \left| \int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^n\right)}{n} \left(f(t) + t f'(t) \right) \mathrm{d}t \right|$ converge (absolument).

On conclut enfin de tout ce qui précède que $\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } f(1) = 0}$.

Exercice 27

On va plutôt poser $S_p = \sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} u_n$ (légèrement plus pratique que ce que propose l'énoncé, mais ne changeant strictement rien au raisonnement).

Précisons l'énoncé : il s'agit de poser pour tout $n \geq 1$, $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si l'écriture de } n \text{ en base décimale ne comprend pas de } 7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

et de déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Pour tout $n \geq 1$, notons $T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. La suite (T_n) étant croissante, elle converge si et seulement sa suite extraite $\left(T_{10^n - 1}\right)_{n \geq 1}$ est convergente. Or pour tout $n \geq 1$: $T_{10^n - 1} = \sum_{k=1}^{10^n - 1} u_n = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} u_n \right) = \sum_{p=0}^{n-1} S_p$ (avec la notation de l'énoncé) ; il en résulte que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum S_p$ converge.

Dans $S_p = \sum_{n=10^p+1}^{10^{p+1}} u_n$, chacun des termes est inférieur ou égal à $\frac{1}{10^p}$, en notant A_p le nombre de termes non nuls dans la somme S_p , on a donc $S_p \leq \frac{A_p}{10^p}$; d'autre part, tous les entiers de $\left\{10^p , ..., 10^{p+1} - 1\right\}$ comportent $p+1$ chiffres. Soit k l'un de ces entiers, écrit sous forme décimale $k = a_{p+1} a_p \ldots a_0$ (avec nécessairement a_{p+1} non nul puisque $k \geq 10^p$). u_k est non nul ssi $a_0 , a_1 , \ldots , a_{p+1}$ sont tous différents de 7 , on a donc $9 \times 9 \times \ldots \times 9 \times 8 = 9^p \, 8$ termes non nuls dans S_p .

Ainsi, $0 \leq S_p \leq 8 \left(\frac{9}{10} \right)^p$; la série géométrique $8 \sum \left(\frac{9}{10} \right)^p$ (de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue) est convergente ; on en déduit, par comparaison, que $\sum S_p$ converge. Finalement, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}}$.

Exercice 29

1. En posant $A_{-1} = 0$, on a, pour tout entier naturel n, $a_n = A_n - A_{n-1}$. On en déduit, grâce à un changement d'indice dans la deuxième somme,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=-1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

2. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à termes positifs. On note M un majorant de $(|A_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. On alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n-1} |A_k|(b_k - b_{k+1}) \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1})$$
$$\leqslant M(b_0 - b_n) \leqslant M b_0.$$

La série à terme positifs $\sum |A_n(b_n - b_{n+1})|$ a ses sommes partielles majorées. Elle est donc convergente. La série $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$ est donc absolument convergente. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Comme par ailleurs la suite $(A_n b_n)$ a pour limite 0, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$ et la série de terme général $a_n b_n$ converge.

3. On pose $a_n = \sin n$ et $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Pour montrer la convergence la série de terme général $u_n = a_n b_n$, il suffit de montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \Im\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^i\right)^k\right) = \Im \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}.$$

Comme, pour tout nombre complexe z, $|\Im z| \leqslant |z|$, on en déduit

$$|A_n| \leqslant \left|\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^i|}.$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc $\sum \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 31

Corrigé sommaire :

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ vérifie les hypothèses du théorème de comparaison série-intégrale ; il en résulte que la série de terme général $f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, $H_n = \ln(n+1) + \gamma + o(1) = \ln n + \gamma + o(1)$.

2.a. On a :

$$\delta_n = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq}{p+q} - \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1}\frac{pq}{p+q} = \sum_{p=1}^{n-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\frac{pq}{p+q} - \sum_{q=1}^{n-1}\frac{pq}{p+q}\right) + \sum_{q=1}^{n}\frac{nq}{n+q}$$

$$= \sum_{p=1}^{n-1}\frac{pn}{p+n} + \sum_{q=1}^{n}\frac{nq}{n+q} = 2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{pn}{p+n} + \frac{n}{2}$$

$$= n\left(\frac{1}{2} + 2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{p+n-n}{p+n}\right) = n\left(2n - \frac{3}{2} - 2n\left(H_{2n-1} - H_n\right)\right).$$

2.b. $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2\left(1 - \left(H_{2n-1} - H_n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2\left(1 - \ln 2\right).$

On en déduit par sommation que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(1-\ln 2\right)\sum_{k=1}^{n} k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\left(1-\ln 2\right)n^3}{3}$.

3. On affine : $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (justifié ensuite), d'où :

$$\delta_n = 2n^2 - \frac{3}{2}n - 2n^2\left(\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(2n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 2n^2\left(1-\ln 2\right) + o(n).$$

Par sommation : $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \left(1-\ln 2\right)\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 + o\left(n^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(1-\ln 2\right)\left(\dfrac{n^3}{3} + n^2 + o\left(n^2\right)\right).$

Justification du développement $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$: en posant $u_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}$, on a

$u_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{p+t} = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t\,dt}{p+t}$, d'où : $\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^1\frac{t\,dt}{p+1} \le u_p \le \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t\,dt}{p-1}$, et donc :

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right) \le u_p \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}\right)$. En sommant, on obtient $\dfrac{1}{2(n+1)} \le \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \le \frac{1}{2n}$, soit :

$\dfrac{1}{2(n+1)} \le \gamma - \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p \le \frac{1}{2n}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p = \gamma - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'un autre côté : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p = H_n - \ln(n+1) = H_n - \ln(n) - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'où le résultat.