Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

DS N°1

On laissera impérativement en tête de devoir une place suffisante pour les commentaires (au moins 10 lignes). On laissera non moins impérativement libre une marge de taille raisonnable.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Seuls les résultats ***encadrés*** *ou* ***soulignés*** *seront pris en considération.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce devoir est composé d'un exercice et d'un problème. Les calculatrices sont autorisées, mais inutiles sauf pour une question.

Exercice

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série à termes strictement positifs supposée convergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{et} \quad c_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

Le but du problème est de prouver la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} b_n$ et $\sum_{n \geq 1} c_n$, et de majorer leurs sommes respectives à l'aide de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

1. ***Etude d'un exemple***

Dans cette question (et dans cette question seulement), on se donne un réel $q \in \left]0,1\right[$, et l'on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = q^n$.

a. Justifier l'existence des somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n$, et donner leurs valeurs.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer b_n et c_n. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$, ainsi que la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_n$.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et deux fois dérivable, à dérivée seconde positive sur I.

a. Montrer que f est convexe, c'est-à-dire que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall\,(a,b)\in I^2,\ \ \forall\, t\in[0,1],\ t.f(a)+(1-t).f(b)\geq f\big(t.a+(1-t).b\big).$$

On pourra dériver deux fois la fonction g définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall\, t\in[0,1],\ g(t)=t.f(a)+(1-t).f(b)-f\big(t.a+(1-t).b\big)$$

b. Montrer alors que :

$$\forall\,(\alpha_k)_{k\in 1,n}\in I^n,\ \ \forall\,(t_k)_{k\in 1,n}\in\left(\mathbb{R}^+\right)^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} t_k=1 :$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_k.f(\alpha_k)\geq f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k.\alpha_k\right).$$

On pourra raisonner par récurrence, et considérer l'expression $\left(1-t_{n+1}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j}.\alpha_k+t_{n+1}.\alpha_{n+1}$.

3. En déduire que : $\forall\,(\alpha_k)_{k\in 1,n}\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n,\ \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$.

4.a. En utilisant une comparaison entre somme et intégrale, montrer que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right)\geq \ln n-1+\frac{1}{n}.$$

b. Justifier que : $\forall\, u\in\mathbb{R}^{+*},\ \ln(1+u)\leq u$.

c. En déduire finalement que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leq\dfrac{e}{n+1}$.

5.a. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ b_n\leq\dfrac{e}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,a_k$.

b. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_p=\displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n$. Déduire de **a.** que :

$$\forall\, p\in\mathbb{N}^*,\ S_p\leq e\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

c. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$ et une majoration de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

6. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ c_n\leq b_n$.

En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_n$ et une majoration de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$.

Problème

A toute suite de complexes $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par les relations :

$$b_n = a_{n-1} - a_n \quad ; \quad c_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad ; \quad d_n = a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1}.$$

- On dit que la suite $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation bornée lorsque la série $\sum b_n$ est absolument convergente.
- On dit que $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est quasi-convexe lorsque la série $\sum n\, d_n$ est absolument convergente.
- On dit que $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe si elle est à valeurs réelles, et si, pour tout $n \geq 1$, le réel d_n est positif ou nul.

On pourra utiliser, sans démonstration, la propriété suivante :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{p=1}^{n} a_{n,p}\right) = \sum_{p=1}^{N}\left(\sum_{n=p}^{N} a_{n,p}\right).$$

Préliminaires

1.a. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ est une série divergente (série de Bertrand).

b. Enoncer et démontrer le théorème spécial des séries alternées (on demande le résultat principal, pas l'encadrement de la somme ni ce qui concerne les restes). Une série vérifiant les hypothèses de ce théorème peut-elle être à variation bornée ? Quasi convexe ? Convexe ?

2. Montrer que, si $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation bornée, alors $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

3. Prouver l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{N} n\, d_n = \sum_{n=1}^{N} b_n - N\, b_{N+1}.$$

Partie I

On suppose dans cette partie que la suite $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite $\left(b_n\right)$, pour que la suite $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convexe.

5. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction réelle f, continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^2 et à dérivée seconde positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $a_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que la suite $\left(a_n\right)$ est convexe.

6. Déterminer toutes les suites $\left(a_n\right)$ convexes telles que la suite $\left(a'_n\right)$ définie par la relation $a'_n = -a_n$ soit également convexe.

7. Déterminer les valeurs du réel strictement positif α telles que la suite $\left(a_n\right) = \left(n^\alpha\right)$ soit convexe.

8. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. On pose, dans cette question, $a_n = \lfloor n^\alpha \rfloor$, où α est un réel strictement positif.

a. La suite $\left(a_n\right)$ est-elle convexe pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$? (on pourra calculer d_n à la machine pour $n \leq 10$).

b. On suppose que $\alpha \geq 2$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto (x+1)^\alpha + (x-1)^\alpha - 2x^\alpha - 2$ est à valeurs positives sur $[1, +\infty[$.

Démontrer que la suite $\left(a_n\right)$ est convexe.

Partie II

Dans cette partie, $\left(a_n\right)$ est une suite convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $\left|a_n\right|$.

9. Démontrer que la suite $\left(b_n\right)$ est convergente. Déterminer sa limite.

10. Démontrer que la suite $\left(a_n\right)$ est convergente.

11. Soient n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$; démontrer les relations :

$$0 \leq n b_n \leq 2\left(a_p - a_n\right).$$

En déduire les limites des suites $\left(n b_n\right)$ et $\left(n b_{n+1}\right)$.

12. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ .$$

Partie III

Dans cette partie, (a_n) est une suite quasi-convexe bornée. On notera A un majorant commun des réels $|a_n|$.

13. Démontrer, pour tout entier $N \geq 2$, la relation :

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leq |a_0 - a_N| + 2 \sum_{n=1}^{N-1} n\,|d_n| \ .$$

En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation bornée.

14. Démontrer (en justifiant l'existence des séries concernées) les relations suivantes :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \leq \left| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right| + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\,|d_n| \ .$$

15. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ .$$

Partie IV

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

16. Démontrer, pour n et N entiers supérieurs ou égaux à 1, les relations :

$$c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{m=1}^{n} m \left(a_m - a_{m+1} \right) \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n - c_{n+1}| \leq \sum_{m=1}^{N} |a_m - a_{m+1}| .$$

17. On suppose dans cette question que (a_n) est à variation bornée.

- Calculer, pour n entier supérieur ou égal à 2, le nombre $c_{n-1} + c_{n+1} - 2\,c_n$ en fonction de $c_{n-1} - c_n$ et $a_{n+1} - a_n$.
- En déduire que (c_n) est quasi-convexe et que l'on a la relation :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\,|c_{n-1} + c_{n+1} - 2\,c_n| \leq 3 \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n| \ .$$

18. On suppose dans cette question que (a_n) est bornée et que (c_{n+1}) est quasi-convexe.

Démontrer, en utilisant le résultat de la question **13.**, que (a_n) est à variation bornée et convergente.

19. On pose, dans cette question, $a_0 = 0$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ si n n'est pas une puissance de 2, $b_n = \dfrac{1}{n}$ si n est une puissance de 2.

Démontrer que ceci définit une suite (a_n) vérifiant les propriétés supposées en **17.** et **18.**.

Peut-on encore écrire, dans ce cas, la relation $\sum_{n=1}^{+\infty} n\,d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

20. On suppose dans cette question que (a_n) est à variation bornée. Démontrer que les propositions

- la série $\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente,
- la série $\sum \dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente,

sont équivalentes. (on établira une relation simple entre $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}$, $\dfrac{c_n}{n+1}$ et $c_{n+1} - c_n$).

Partie V

Dans cette partie, (a_n) est une suite complexe.

21. Démontrer, pour tout entier $p \geq 1$, les relations :

$$\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leq 1 + \ln(p)$$

$$\left| \left| a_p \ln p - a_{p+1} \ln(p+1) \right| - \left| a_p - a_{p+1} \right| \ln p \right| \leq \frac{\left| a_{p+1} \right|}{p}.$$

22. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

- la suite $(a_n \ln n)$ converge vers 0 et la série $\sum (a_n - a_{n+1}) \ln n$ est absolument convergente,
- la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ et $\sum \left(a_n \ln n - a_{n+1} \ln(n+1)\right)$ sont absolument convergente.

23. Donner un exemple simple de suite (a_n) satisfaisant aux deux conditions ci-dessus.

Fin