Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point ; $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

I Espaces fonctionnels et modes de convergence

1. Convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions

Définition 1 (convergence simple d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ***simplement*** sur I lorsque pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Lorsque tel est le cas, on dit encore que (f_n) converge simplement vers f, où $f : I \to \mathbb{K}$ est la fonction définie par $\forall\ x \in I,\ f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} (f_n(x))$.

Définition 2 (convergence simple d'une série de fonctions)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge ***simplement*** sur I lorsque pour tout $x \in I$, la série numérique $\left(\sum f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Lorsque tel est le cas, on dit encore que $\sum f_n$ converge simplement vers f, où $f : I \to \mathbb{K}$ est la fonction définie par : $\forall\ x \in I,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Fonctions bornées ; norme de la convergence uniforme

Rappels et définition

- Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite bornée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\ x \in I,\ |f(x)| \leq M$.
- • • L'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et bornées, est un sous – espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, stable par produit.
- • • • Sur le $\mathbb{K}$ – espace vectoriel $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on définit la norme de la convergence uniforme, notée $\| \ \|_\infty$, par :

$$\forall\ f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}),\ \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Remarques

- La norme $\| \ \|_\infty$ est également noté norme infini (sans e : c'est l'indice qui est infini, pas la norme).
- • • S'il y a ambiguïté sur l'intervalle I mis en jeu, on pourra noter $\| \ \|_{\infty, I}$ la norme infini sur I.

3. Convergence uniforme, convergence normale sur un domaine

a. Suites de fonctions : convergence uniforme sur un domaine

Définition 1 (convergence uniforme d'une suite de fonctions <u>sur un domaine</u>)

Soit $\left(f_n \right)$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la suite $\left(f_n \right)$ converge ***uniformément*** vers f **sur *I*** lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées, et vérifient : $$\lim_{n \to +\infty} \left\| f_n - f \right\|_{\infty} = 0.$$

Définition 2 (convergence uniforme d'une suite de fonctions <u>sur tout segment d'un domaine</u>)

Soit $\left(f_n \right)$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la suite $\left(f_n \right)$ converge ***uniformément*** vers f **sur tout segment de *I*** lorsque, pour tout $\left(a, b \right) \in I^2$, $a \leq b$, les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur $\left[a, b \right]$, et vérifient :

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| f_n - f \right\|_{\infty, \left[a, b \right]} = 0.$$

En résumé :

- La suite $\left(f_n \right)$ converge simplement vers f sur I lorsque :

$$\forall\ x \in I,\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_x \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N_x \Rightarrow \left| f_n \left(x \right) - f \left(x \right) \right| \leq \varepsilon.$$

•• La suite $\left(f_n \right)$ converge uniformément vers f sur I lorsque :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in I,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left| f_n \left(x \right) - f \left(x \right) \right| \leq \varepsilon.$$

••• La suite $\left(f_n \right)$ converge uniformément vers f sur tout segment de I lorsque :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \left(a, b \right) \in I^2,\ a \leq b,\ \exists\ N_{a,b} \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \left[a, b \right],\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N_{a,b} \Rightarrow \left| f_n \left(x \right) - f \left(x \right) \right| \leq \varepsilon.$$

b. Séries de fonctions : convergence uniforme, convergence normale

Définition 1 (convergence uniforme d'une série de fonctions <u>sur un domaine</u>)

Soit $\left(f_n \right)$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge ***uniformément*** vers f **sur *I*** lorsque la suite fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

On dispose du critère fondamental suivant :

Proposition 1

La série de fonctions $\sum f_n$ converge ***uniformément*** vers une fonction f **sur *I*** si et seulement si la suite des restes $\left(R_n \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie, si ces restes sont bornés, et vérifient : $\lim_{n \to +\infty} \left\| R_n \right\|_{\infty} = 0$.

Remarque

On dispose également, pour les séries de fonctions, de la notion de convergence uniforme sur tout segment d'un domaine.

Définition 2 (convergence normale d'une série de fonctions <u>sur un domaine</u>, sur tout segment <u>d'un domaine</u>)

Soit $\left(f_n\right)$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge ***normalement*** sur I lorsque les fonctions f_n sont bornées sur I et que la série numérique $\sum \left\| f_n \right\|_\infty$ converge.
- • La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I lorsque, pour tout $\left[a, b\right] \subset I$ avec $a \leq b$, les fonctions f_n sont bornées sur $\left[a, b\right]$, et la série $\sum \left\| f_n \right\|_{\infty, [a,b]}$ convergente.

Proposition (condition nécessaire et suffisante de convergence normale)

La série de fonctions $\sum_{n \geq n_0} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si :

- les fonctions f_n sont bornées sur I ;
- • il existe une série de réels positifs $\sum_{n \geq n_0} \alpha_n$, convergente et telle que pour tout $n \geq n_0$, $\left\| f_n \right\|_\infty \leq \alpha_n$.

Preuve

- Supposons $\sum_{n \geq n_0} f_n$ normalement convergente sur I. Alors, pour tout $n \geq n_0$, la fonction f_n est bornée, le réel positif $\alpha_n = \left\| f_n \right\|_\infty$ est donc bien défini. De plus, la série $\sum_{n \geq n_0} \alpha_n$ converge, et l'on a trivialement pour tout $n \geq n_0$, $\left\| f_n \right\|_\infty \leq \alpha_n$.
- • Supposons que les fonctions f_n sont toutes bornées sur I, et qu'il existe une suite de réels positifs $\sum_{n \geq n_0} \alpha_n$ convergente et telle que pour tout $n \geq n_0$, $\left\| f_n \right\|_\infty \leq \alpha_n$. Alors la série $\sum_{n \geq n_0} \left\| f_n \right\|_\infty$ est bien définie, et, d'après le théorème de comparaison des séries de terme général positif, elle converge : $\sum_{n \geq n_0} f_n$ est normalement convergente sur I.

Remarque

Malgré son caractère semi – idiot, ce résultat est utile, car il permet de prouver la convergence normale d'une série de fonctions, sans avoir à déterminer la norme infini de chacune d'entre elles. Par exemple, si l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n\left(x\right) = \dfrac{e^{\frac{-nx^2}{x^2 + \sqrt{n^2 + \ln\left(2 + |x|\right)}}}}{\left(n + 1\right)^2}$, il est clair que les fonctions f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\| f_n \right\|_\infty \leq \dfrac{1}{\left(n + 1\right)^2}$; comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{\left(n + 1\right)^2}$ converge, la convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ s'ensuit sans douleur ; en revanche, déterminer précisément $\left\| f_n \right\|_\infty$ serait manifestement abject.

4. Comparaison des modes de convergence

Soit $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

a. Suites ou séries de fonctions : la convergence uniforme implique la convergence simple

Proposition 1 (la convergence uniforme implique la convergence simple, version suites de fonctions)

> Si la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément vers une fonction f sur I, alors cette suite de fonctions converge simplement vers f sur ce même intervalle.

Preuve

Supposons que $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f. Alors, par définition, les fonctions $f_n - f$ sont bornées, et la suite $\left(\left\| f_n - f \right\|\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

Soit $x \in I$. Par définition de la norme $\| \|_\infty$, on a pour tout $n \geq n_0$, $\left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \left\| f_n - f \right\|_\infty$. On en déduit que la suite $\left(\left| f_n(x) - f(x) \right|\right)_{n \geq n_0}$ converge elle aussi vers 0, et l'on a prouvé que $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ converge simplement vers f sur I.

On en déduit :

Proposition 2 (la convergence uniforme implique la convergence simple, version séries de fonctions)

> Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I, alors cette série de fonctions converge simplement vers f sur ce même intervalle.

b. Séries de fonctions : convergence normale versus convergence uniforme

Proposition (la convergence normale implique la convergence uniforme)

> Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement vers une fonction f sur I, alors cette série de fonctions converge uniformément vers f sur ce même domaine.

Remarque

La convergence normale sur un domaine implique donc également la convergence simple et absolue sur ce même domaine.

II Applications de la convergence uniforme sur un domaine

1. Convergence uniforme et continuité de la somme

a. Versions globales

Théorème 1 (de continuité d'une limite de suite de fonctions)

> Soit $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformément sur I vers une fonction f.
> Alors, la fonction f est continue.

Preuve

Soit $x_0 \in I$, et soit un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme : les fonctions $f - f_n$ sont bornées sur I, et il existe un entier $N \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\left\| f - f_n \right\|_{\infty, I} \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Par ailleurs, la fonction f_N est continue en x_0, ainsi : $\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left| x - x_0 \right| \leq \eta \Rightarrow \left| f_N(x) - f_N(x_0) \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Alors, pour tout $x \in I$ tel que $\left| x - x_0 \right| \leq \eta$:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(x_0) \right| &= \left| f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0) \right| \\ &\leq \left| f(x) - f_N(x) \right| + \left| f_N(x) - f_N(x_0) \right| + \left| f_N(x_0) - f(x_0) \right| \\ &\leq \left\| f - f_N \right\|_\infty + \left| f_N(x) - f_N(x_0) \right| + \left\| f - f_N \right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in I,\ \left| x - x_0 \right| \leq \eta \Rightarrow \left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$: la fonction f est continue.

Théorème 2 (de continuité d'une somme de série de fonctions)

> Soit $\left(f_n \right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
>
> On suppose que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.
>
> Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de cette série de fonctions. Alors, la fonction f est continue.

b. Version locales

Constatation préliminaire (la continuité sur tout segment, c'est la continuité tout court)

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la restriction de f au segment $[a, b]$ est continue. Alors, la fonction f est continue.

Preuve

Soit $x_0 \in I$. Si x_0 n'est pas une borne de I, il existe un segment $S = \left[x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha \right]$ qui est inclus dans I, avec $\alpha > 0$. Par hypothèse, la restriction $f_{|S}$ de f à S est continue sur S, donc en particulier en x_0. Par suite : $\lim\limits_{x \to x_0} f_{|S}(x) = f_{|S}(x_0)$. Ceci revient à dire que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, et que f est continue en x_0.

Si x_0 est la borne inférieure (respectivement la borne supérieure) de I, on choisit un segment $S = \left[x_0,\ x_0 + \alpha \right]$ (respectivement $S = \left[x_0 - \alpha,\ \alpha \right]$) inclus dans I, et l'on conclut comme ci – dessus que f est continue en x_0.

Remarques

- Parler de fonction « continue sur tout segment de I » n'a donc pas d'intérêt, et laisserait penser que la notion de continuité a été mal digérée. On évitera donc, et on parlera de fonction continue, tout simplement …
- De la même façon, dire que la restriction de f à tout segment de I est de classe C^1 (respectivement, de classe C^p), c'est dire que f elle – même est de classe C^1 (respectivement, de classe C^p).
- Cette constatation de début de paragraphe est certes un peu idiote. Toutefois, elle est à la base de toutes les « versions locales » des théorèmes qui suivent, et qui seront bien pratiques lorsque les « versions globales » ne s'appliqueront pas... cf. ce qui suit.

Théorème (de continuité d'une limite de suite de fonctions, version locale)

Soit $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, convergeant simplement vers une fonction f. On suppose que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur tout segment de I. Alors, la fonction f est continue.

Théorème (de continuité d'une somme de série de fonctions, version locale)

Soit $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de cette série de fonctions. Alors, la fonction f est continue.

2. Interversion somme/limite : théorème de la double limite

Théorème (de la double limite)

Soit $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit a une borne de I.

On suppose que :

i – La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n$ converge uniformément sur I.

ii – Pour tout $n \geq n_0$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a.

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de cette série de fonctions. Alors, la série $\sum\limits_{n \geq n_0} \ell_n$ converge, f admet une limite finie en a, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} \ell_n$.

3. Interversion limite/intégrale et intégration terme à terme

a. Interversion limite-intégrale

Théorème (d'interversion limite-intégrale)

Soit $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f.

Alors, la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n \geq n_0}$ converge, et l'on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Intégration terme à terme

Théorème (de permutation des symboles Σ et $\int$, ou d'intégration terme à terme)

Soit $\left(f_n\right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de cette série de fonctions. Alors, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$:

la série $\sum \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et $\sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sum\limits_{n = n_0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve

Les fonctions f_n sont continues et $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, donc f est continue. Pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k = n_0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k = n_0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \sum_{k = n_0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\sum_{k = n_0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \sum_{k = n_0}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x \right) - \int_a^b \sum_{k = n+1}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \sum_{k = n+1}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

d'où $\left| \sum\limits_{k = n_0}^{n} \int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int\limits_a^b \left\| \sum\limits_{k = n+1}^{+\infty} f_k \right\|_\infty \mathrm{d}x = (b - a) \left\| \sum\limits_{k = n+1}^{+\infty} f_k \right\|_\infty$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \sum\limits_{k = n+1}^{+\infty} f_k \right\|_\infty = 0$, on en déduit, par passage à la limite, que $\sum\limits_{n \geq n_0} \int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et que

$\sum\limits_{k = n_0}^{+\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sum\limits_{k = n_0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemples

- ***Exemple 1***

  Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a < b$, et soit $I_{a,b} = \int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{d}t}{1 - \mathrm{e}^{-t}}$.

  On a d'une part, $I_{a,b} = \int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{-t} - 1} = \Big[\ln\big(\mathrm{e}^{t} - 1\big) \Big]_a^b = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{b} - 1}{\mathrm{e}^{a} - 1} \right)$.

  D'autre part, $I_{a,b} = \int\limits_a^b \sum\limits_{n = 0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$. En notant f_n la fonction continue $f_n : \left(\begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-nt} \end{array} \right.$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\| f_n \|_\infty = \mathrm{e}^{-na}$, et la série géométrique $\sum \mathrm{e}^{-na}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique donc : la série $\sum \int\limits_a^b \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge, et l'on a $\sum\limits_{n = 0}^{+\infty} \int\limits_a^b \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = I_{a,b}$.

  Après calcul, on en déduit la zolie formule : $b - a + \sum\limits_{n = 1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-na} - \mathrm{e}^{-nb}}{n} = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{b} - 1}{\mathrm{e}^{a} - 1} \right)$.

- • ***Exemple 2***

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t = \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2 . 4^n}$.

En déduire la valeur de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{8^n}$.

Formellement, on a

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi\, 2^n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos^2 t}{2} \right)^n \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\cos^2 t}{2} \right)^n \mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - \frac{1}{2}\cos^2 t},$$

reste à justifier cette égalité. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_n(t) = \left(\frac{\cos t}{2} \right)^n$. Les fonctions f_n sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\| f_n \|_\infty = \frac{1}{2^n}$, et la série $\sum \frac{1}{2^n}$ (géométrique, de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue) est convergente : $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il en résulte, d'après le théorème d'interversion somme/intégrale, que la série $\sum \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et que l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$: d'où la convergence de la série définissant S, et l'égalité $S = \displaystyle\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - \frac{1}{2}\cos^2 t}$.

Calculons maintenant cette intégrale, en effectuant le changement de variable $u = \tan t$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \tan t$ réalise une bijection C^1 de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}^+$, et l'on a

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2}\mathrm{d}t}{\tan^2 t + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}{\varphi^2(t) + \frac{1}{2}}.$$

Le théorème de changement de variable permet d'en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \frac{1}{2}}$ converge (ce qui est de toute façon évident), et que $S = \displaystyle\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \frac{1}{2}}$. Finalement, $S = \displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^X = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

4. Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

Théorème (de dérivation d'une limite)

Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge simplement sur I ;

•• la suite de fonctions $\left(f_n' \right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur I, et $\forall\ x \in I,\ f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$.

Preuve

Il suffit de démontrer le théorème avec les hypothèses plus faibles : $\left(f_n \right)_{n \geq n_0}$ suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, vérifiant :

- il existe $a \in I$ tel que la suite $\left(f_n(a) \right)_{n \geq n_0}$ converge ;

•• la suite de fonctions $\left(f_n' \right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur I.

Sous ses hypothèses, notons g la limite de la suite de fonctions $\left(f_n' \right)_{n \geq n_0}$; g est continue, comme limite uniforme sur I d'une suite de fonctions continue. On a pour tout $x \in I$, pour tout $n \geq n_0$,

$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$. Par hypothèse, $f : x \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est définie en a. La convergence uniforme de $\left(f_n' \right)_{n \geq n_0}$ sur I, donc sur $\overleftrightarrow{[a, x]}$, assure que la suite d'intégrales $\left(\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci prouve, d'une part, que f est bien définie en x, et, d'autre part, que

$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. On en déduit que f est bien définie sur I, de classe C^1, et que c'est une primitive de la fonction g. On a donc pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$.

Théorème (de dérivation d'une limite, version locale)

Soit $\left(f_n \right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- la suite de fonctions $\left(f_n \right)_{n \geq n_0}$ converge simplement sur I ;

•• la suite de fonctions $\left(f_n' \right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur I, et $\forall\ x \in I,\ f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$.

Théorème (extension aux fonctions de classe C^p)

Soit un entier $p \geq 0$.

Soit $\left(f_n \right)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de classe C^p sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- pour tout $k \in \ 0, p-1\ $, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)} \right)_{n \geq n_0}$ converge simplement sur I ;

•• la suite de fonctions $\left(f_n^{(p)} \right)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ est de classe C^p sur I, et pour tout $k \in \quad 0, p \quad$,

$$\forall x \in I,\ f^{(k)}(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n^{(k)}(x).$$

5. Dérivation terme à terme

Théorème (de dérivation terme à terme)

Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- • la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n$ converge simplement sur I ;
- • • la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur I, et $\left(\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n'$.

Théorème (de dérivation terme à terme, version locale)

Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- • la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n$ converge **simplement** sur I ;
- • • la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n'$ converge **uniformément** sur tout segment de I.

Alors la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur I, et $\left(\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n'$.

Théorème (extension aux fonctions de classe C^p)

Soit un entier $p \geq 0$.

Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions de classe C^p sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- • pour tout $k \in \quad 0, p-1 \quad$, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n^{(k)}$ converge simplement sur I ;
- • • la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq n_0} f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^p sur I, et pour tout $k \in \quad 0, p \quad$,

$$\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

III Annexe : pourquoi on a parlé de tout ça

Insuffisance de la notion de convergence simple

Paragraphe donné à titre uniquement culturel, à feuilleter rapidement.

1. *La somme d'une série de fonctions continues par morceaux, simplement convergente, peut n'être continue en aucun point*

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n donnée par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ s'il existe } p \in \mathbb{Z} \text{ premier avec } n \text{ tel que } x = \dfrac{p}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Alors

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux, car : (*complétez* !)

- • La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

  car… (*complétez* !)

- • • La fonction f sus – définie n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$,

car… (*complétez* !)

2. La somme d'une série de fonctions continues, simplement convergente, peut n'être continue en aucun point.

2'. La somme d'une série de fonctions dérivables, simplement convergente, peut n'être continue en aucun point.

Les fonctions dérivées de Darboux $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \pi a_n \varphi'(\sin n\pi x)\cos(n\pi x)$ (cf. **4.**) permettent, déjà, d'obtenir des sommes discontinues en tout point de $\mathbb{Q}$. Obtenir une fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ est possible également.

3. La somme d'une série de fonctions dérivables, simplement convergente, peut n'être dérivable en aucun point.

Cf. l'exercice 19* de la feuille. Cf. également l'exercice qui suit :

Exercice

1. Montrer que, pour tout réel α, $\max\left(|\sin\alpha|, \sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, prouver que $|\sin\alpha| \leq |\alpha|$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $\sin a - \sin b$ en fonction de $\sin\frac{a-b}{2}$ et de $\cos\frac{a+b}{2}$.

On considère la fonction $F : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(16^n x)}{2^n} \end{cases}$.

2. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue.

3. On se propose de prouver que F n'est dérivable en aucun point.

Soit x un réel. On pose pour tout $h \neq 0$, $\Delta(h) = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$.

a. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\Delta_p = \Delta\left(\dfrac{\pi}{16^p}\right)$.

Montrer que $|\Delta_p| \geq \dfrac{8^p}{\pi}\left[2\left|\sin(16^p x)\right| - \dfrac{\pi}{7}\right]$.

b. On pose $\Delta'_p = \Delta\left(\dfrac{\pi}{2\,.\,16^p}\right)$

Montrer que $\left|\Delta'_p\right| \geq \dfrac{8^p}{\pi}\left[2\sqrt{2}\left|\sin\left(16^p x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| - \dfrac{\pi}{7}\right]$.

c. Conclure.

---

1. Fausse question, donnant des indications pour ce qui va suivre.

2. La série de fonctions définissant f converge normalement sur $\mathbb{R}$ de façon évidente, ce qui prouve que F est bien définie, et qu'elle est continue.

3. On a pour tout $h \neq 0$,

$$\Delta(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(16^n x + 16^n h\right) - \sin\left(16^n x\right)}{2^n} = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\cos\left(16^n x + 16^n \frac{h}{2}\right)\sin\left(16^n \frac{h}{2}\right)}{2^n}$$

(on a utilisé la formule : $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$).

a. On a en particulier, $\Delta_p = \dfrac{16^p}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\cos\left(16^n x + 16^n\frac{\pi}{2\,.\,16^p}\right)\sin\left(16^n\frac{\pi}{2\,.\,16^p}\right)}{2^n}$.

Dans cette somme, $\sin\left(16^n\dfrac{\pi}{16^p}\right)$ est nul dès que $n > p$,

donc $\Delta_p = \dfrac{16^p}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{p}\frac{2\cos\left(16^n x + 16^n\frac{\pi}{16^p}\right)\sin\left(16^n\frac{\pi}{16^p}\right)}{2^n}$.

Isolons le dernier terme de cette somme ; on obtient

$$\Delta_p = \underbrace{\frac{16^p}{\pi}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{2\cos\left(16^n x + 16^n\frac{\pi}{2\,.\,16^p}\right)\sin\left(16^n\frac{\pi}{2\,.\,16^p}\right)}{2^n}}_{\delta_p} + \frac{8^p}{\pi}2\cos\left(16^p x + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \delta_p - \frac{2\,.\,8^p}{\pi}\sin\left(16^p x\right),$$

et, en majorant $\left|\cos\left(16^n x + 16^n\dfrac{\pi}{2\,.\,16^p}\right)\right|$ par 1 et $\left|\sin\left(16^n\dfrac{\pi}{2\,.\,16^p}\right)\right|$ par $16^n\dfrac{\pi}{2\,.\,16^p}$, il vient :

$$\left|\delta_p\right| \leq \frac{16^p}{\pi}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{2\,.\,16^n\frac{\pi}{2\,.\,16^p}}{2^n} = \sum_{n=0}^{p-1}8^n = \frac{8^p - 1}{7} \leq \frac{8^p}{7}.$$

On en déduit que $\boxed{\left|\Delta_p\right| \geq \dfrac{8^p}{\pi}\left[2\left|\sin\left(16^p x\right)\right| - \dfrac{\pi}{7}\right]}$.

b. De manière analogue,

$$\Delta'_p = \frac{2\,.\,16^p}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\cos\left(16^n x + 16^n\frac{\pi}{4\,.\,16^p}\right)\sin\left(16^n\frac{\pi}{4\,.\,16^p}\right)}{2^n}$$

$$= \frac{2\,.\,16^p}{\pi}\sum_{n=0}^{p}\frac{2\cos\left(16^n x + 16^n\frac{\pi}{4\,.\,16^p}\right)\sin\left(16^n\frac{\pi}{4\,.\,16^p}\right)}{2^n}\quad,\quad \text{donc}$$

$$\Delta'_p = \underbrace{\frac{2\,.\,16^p}{\pi}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{2\cos\left(16^n x + 16^n\dfrac{\pi}{4\,.\,16^p}\right)\sin\left(16^n\dfrac{\pi}{4\,.\,16^p}\right)}{2^n}}_{\delta'_p} + \frac{2\sqrt{2}\,.\,8^p}{\pi}\cos\left(16^p x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \delta'_p - \frac{2\sqrt{2}\,.\,8^p}{\pi}\sin\left(16^p x - \frac{\pi}{4}\right),$$

et $\left|\delta'_p\right| \leq \dfrac{2\,.\,16^p}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{2\,.\,16^n\dfrac{\pi}{4\,.\,16^p}}{2^n} = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} 8^n = \frac{8^p-1}{7} \leq \frac{8^p}{7}$

donc $\boxed{\left|\Delta'_p\right| \geq \dfrac{8^p}{\pi}\left[2\sqrt{2}\left|\sin\left(16^p x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| - \dfrac{\pi}{7}\right]}$.

On déduit de ce qui précède que

$\max\left(\left|\Delta_p\right|, \left|\Delta'_p\right|\right) \geq \dfrac{8^p}{\pi}\left[2\max\left(\left|\sin\left(16^p x\right)\right|, \sqrt{2}\left|\sin\left(16^p x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right) - \dfrac{\pi}{7}\right]$, d'où d'après **Q1.** :

$\max\left(\left|\Delta_p\right|, \left|\Delta'_p\right|\right) \geq \dfrac{8^p}{\pi}\left[\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{7}\right]$.

Ainsi, $\max\left(\left|\Delta_p\right|, \left|\Delta'_p\right|\right)$ tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$, ce qui prouve que F n'est dérivable à droite en aucun point.

4. Un Koin Kultur

- En 1872, Karl Weierstrass fut le premier à publier non seulement une, mais toute une famille de fonctions continues et nulle part dérivables. Elles sont définies par

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos\left(b^k x\right),$$

où a et b sont des constantes réelles, a étant dans $]0,1[$ et le produit $a\,b$ strictement supérieur à $1 + \dfrac{3\pi}{2}$. Après cette découverte, des mathématiciens en trouvèrent d'autres.

On alla même plus loin en prouvant que pour une fonction continue arbitraire, il existe une fonction continue partout et nulle part dérivable aussi proche d'elle que l'on désire, au sens de la norme $\|\ \|_\infty$. Cela signifie que ces fonctions particulières sont particulièrement nombreuses et forment un « gros » ensemble d'un point de vue topologique.

•• Darboux donne l'exemple suivant de fonction F dérivable dont la dérivée f n'est continue sur aucun intervalle.

Il utilise une première fonction, qui est dérivable en tout point, mais dont la dérivée est discontinue en 0 :

$$\varphi : \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right).$$

Pour toute série $\sum a_n$ absolument convergente, il définit ensuite la fonction : $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}\varphi\left(\sin n\pi x\right)$.

Il prouve que cette fonction est dérivable, de dérivée $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \pi\, a_n\, \varphi'\left(\sin n\pi x\right)\cos\left(n\pi x\right)$.

et affirme qu'on peut obtenir ainsi des fonctions F dérivables, dont la dérivée n'est continue en aucun rationnel.