



2025 - 2026

Liste d'exercices

Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Etudier la convergence (simple, absolue, uniforme, normale), des séries de termes généraux :

1. $f_n : x \mapsto n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur \mathbb{R}^+ . 2. $g_n : x \mapsto \frac{1}{n + n^3 x^2}$ sur \mathbb{R}_+^* . 3. $h_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{(1 + x^2)^n}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : \begin{cases}]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \min(x^n, 1 - x^n) \end{cases}$. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Montrer que f est définie et continue sur $]0, 1[$.

Exercice 3

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r \neq |z|$. A l'aide d'un développement en série, calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{z - r e^{ix}}$.

Exercice 4

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de S .
- Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Déterminer un équivalent de S au voisinage de 0.

Exercice 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Montrer (directement, ie. sans utiliser les résultats de Q3.) que f est continue sur D_f .
- Montrer que f est de classe C^∞ sur D_f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 6

Calculer $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x - nx) dx$. On pourra remarquer que $I = \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} e^{-inx} dx \right)$, et développer $e^{e^{ix}}$ en série.

Exercice 7

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . Montrer que f est continue sur ce domaine.
 2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 3. Montrer, à l'aide d'une intégrale, que $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$.
-

Exercice 8*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que la série $\sum_{n \geq 1} n a_n$ converge absolument. Pour tout $(x, y) \in [0, \pi]^2$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \sin(nx) \text{ et } g(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) \sin(ny).$$

Montrer que f est positive sur $[0, \pi]$ si et seulement si g est positive sur $[0, \pi]^2$.

Exercice 9

On pose lorsque c'est possible : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x e^{-n x^2}$.

Existence, calcul, continuité, équivalent en $+\infty$. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 10

Transformation d'Abel

Soit $f_n : t \mapsto \frac{e^{int}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, 2\pi[$.

On pourra écrire que $e^{ikt} = (S_k(t)) - (S_{k-1}(t))$, avec $S_k(t) = \sum_{p=1}^k e^{ipt}$.

2. En déduire que f est continue sur $]0, 2\pi[$.
-

Exercice 11

Soit la série de fonctions $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que S définit une fonction continue sur \mathbb{R} .
 2. Soient $x > 0$ et $n \geq 1$. Justifier que $\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{x}{x^2 + t^2} dt$.
 3. En déduire que S admet une limite en $+\infty$, et la déterminer.
-

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$. Justifier l'existence de $\int_0^1 f(x) dx$, et calculer cette intégrale.

Exercice 13

On pose lorsque c'est possible : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$.

- Domaine de définition et continuité de f .
- Montrer que f est C^1 sur \mathbb{R}^* .
- Calculer : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2 t^2)^2}$.
- Existence et valeur de $f'(0^+)$ et $f'(0^-)$ en fonction de ce qui précède.

Exercice 14

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

- Préciser l'ensemble de définition D de S .
- Etudier la continuité de S (remarquer que $S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$).
- Etudier les variations de S , et en trouver un équivalent aux bornes de D .

Exercice 15

Soient a un réel strictement positif non entier fixé et f la fonction d'une variable réelle donnée par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{(n+x)^a} - \frac{1}{(n+1-x)^a} \right].$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que f est de classe C^1 .
- Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 16

Soit $f : \begin{cases} [0, 3\pi] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto t + \sin t \end{cases}$, et $x \in [0, 3\pi]$. On pose $u_0(x) = x$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$.

- Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $]2\pi, 3\pi]$, puis sur $[0, 3\pi]$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $[0, 3\pi]$?
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{3\pi} u_n(t) dt$.

Exercice 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

- En utilisant la formule de Stirling, montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .
- Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- En déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 18*

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série absolument convergente et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |x - b_n| a_n.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n - x| \geq \varepsilon$. Montrer que f est dérivable en x .
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f .

On commencera par étudier la dérivabilité en 0 de $f_0 : x \mapsto \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ b_n = 0}} |x - b_n| a_n$ et $f_+ : x \mapsto \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ b_n > 0}} |x - b_n| a_n$.

Exercice 19*

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 4 telle que $g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_k : x \mapsto \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum g_k(x)$ converge, et que la fonction $G : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ est continue.
2. Avec les notations usuelles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

a. Soit x un réel donné. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que les points $(x, g_n(x))$

et $\left(x + \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}, g_n\left(x + \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}\right)\right)$ soient sur le même segment de graphe de g_n .

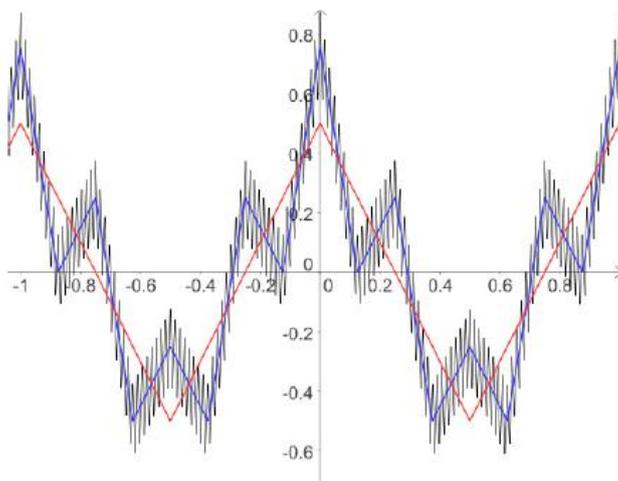
b. Soit $h_n = \frac{\varepsilon}{2^{2^n}}$. Montrer que $R_n(x) = R_n(x + h_n)$.

c. Montrer que $|g_n(x + h_n) - g_n(x)| = 1$.

d. Montrer que $\sup_{1 \leq k \leq n-1} (|g_k(x + h_n) - S_k(x)|) \leq 2^{-2^{n-1}}$, puis que

$$|S_{n-1}(x + h_n) - S_{n-1}(x)| \leq 2^{-2^{n-1}}.$$

3. Montrer que G n'est dérivable en aucun point. La fonction G est appelée fonction de Mc Carthy.



Exercices d'oral

Exercice 20

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions données par : $f_n(x) = \cos\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right)$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de \mathbb{R} ? Sur \mathbb{R} ?

Exercice 21

On pose, si c'est possible, pour $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_S de S .
2. Montrer que S est continue sur D_S .
3. Calculer, pour tout $x \in D_S$, $xS(x) - S(x+1)$.
4. Donner un équivalent simple de $S(x)$ au voisinage de 0.
5. Donner un développement asymptotique de $S(x)$ au voisinage de $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.

Exercice 22

Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par :
$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ \forall x > 0, f_n(x) = x \left(\sin \frac{1}{x}\right)^{2n} \end{cases}$$
 converge simplement, mais pas

uniformément sur \mathbb{R}_+ , vers une fonction f que l'on déterminera.

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n \frac{e^{-x}}{n!}$, puis étudier $\sum f_n$.

Exercice 23

Montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 24

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur \mathbb{R}^+ de la suite de fonctions définie par :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}.$$

Exercice 25

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ est définie sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$, $(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.
3. Montrer que la fonction $U : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$ est continue sur $[-1, 1]$.
4. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(1-x)S(x) \underset{1^-}{=} -x \ln(1-x) + \ell + o(1)$.

5. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 S(x) dx$.
-

Exercice 26

1. Déterminer le domaine de convergence de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(nx)}$.
2. Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* ; est-elle continue en 0 ?
-

Exercice 27

Soit α un réel. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
-

Exercice 28

Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt^2}}{n^2 + 1}$.

1. Montrer que f est définie sur un intervalle I que l'on déterminera.
- 2.a. Montrer que f est continue sur I .
- 2.b. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $0 < f(t) - 1 < \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt^2}$, et en déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$.
-

Exercice 29

On pose lorsque c'est possible : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{tn})$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f .
2. Montrer que f est continue sur D_f .
3. Etudier les variations de f .
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
-

Exercice 30

On pose lorsque c'est possible : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{tn})$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.
3. Etudier la dérivabilité de f .