Liste d'exercices

Suites numériques : des corrigés

Exercice 12

Calcul du noyau de Dirichlet

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{\sin\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

2. En profiter pour revoir vos formules de trigo, si elles ne sont pas impeccables.

Pour tout $t \in \left]0, \pi\right[$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a grâce aux formules d'Euler :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \left(e^{i n t} + e^{-i n t}\right),$$

soit :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{1}{2}\left(e^{i 0 t} + \sum_{n=1}^{m} e^{i n t} + \sum_{n=1}^{m} e^{-i n t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i 0 t} + \sum_{n=1}^{m} e^{i n t} + \sum_{n=-m}^{-1} e^{i n t}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} e^{i n t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} \left(e^{i t}\right)^n.$$

Comme $t \in \left]0, \pi\right[$, la somme géométrique $\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{i t}\right)^n$ est de raison différente de 1. On en déduit que

$$\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{i t}\right)^n = \underbrace{e^{-i m t}}_{\text{premier terme}} \frac{\overbrace{1 - e^{i(2m+1)t}}^{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}}{\underbrace{1 - e^{i t}}_{1 - \text{raison}}}$$

. On arrange classiquement l'expression obtenue en mettant en facteur, au numérateur et au dénominateur, les « demies exponentielles », ie. en écrivant que

$$\sum_{n=-m}^{m} \left(e^{i t}\right)^n = e^{-i m t} \frac{e^{i \frac{2m+1}{2} t}}{e^{i \frac{1}{2} t}} \frac{e^{-i \frac{2m+1}{2} t} - e^{i \frac{2m+1}{2} t}}{e^{-i \frac{1}{2} t} - e^{i \frac{1}{2} t}}.$$

Il ne reste plus qu'à simplifier ; on obtient $\displaystyle \sum_{n=-m}^{m} \left(e^{i t}\right)^n = \frac{-2\,i \sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right)}{-2\,i \sin\left(\frac{1}{2} t\right)}$,

et l'on a donc $\displaystyle \boxed{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^{m} \left(e^{i t}\right)^n = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2} t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2} t\right)}}$.

Exercice 13

Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. *Chercher a et b tels que* $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

C'est immédiat. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} \quad \text{changement d'indice dans la deuxième somme} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 20

Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $u_n = \sin\left(\sqrt{\pi^4 + 4\pi^3 n + 2\pi^2 n^2} \right)$.

2. $v_n = n!\sin\left(\left(\mathrm{e} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!} \right) \pi \right)$. *Indication : à l'ordre $n+1$, la formule de Taylor…*

3. $w_n = \left(\frac{3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n$.

4. $x_n = \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

2. La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'ordre $n+1$ à la fonction exponentielle entre 0 et 1, est correcte, puisque $\exp$ est de classe C^{n+2} sur $[0,1]$. Ladite formule de Taylor donne :

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + u_n,$$

avec $0 \le u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \le \mathrm{e} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+2)!}$, d'où $u_n = \circ\left(\frac{1}{(n+1)!} \right)$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
v_n &= n!\sin\left(\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!} \right) \right) \pi \right) \\
&= n!\sin\left(\pi + \frac{1}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!} \right) \right) \\
&= -n!\sin\left(\frac{1}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1} \right),
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{v_n \sim -\dfrac{1}{n+1} \sim -\dfrac{1}{n}}$.

3. $w_n = \left(\dfrac{e^{\frac{\ln 3}{n}} + e^{\frac{\ln 4}{n}}}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1 + \dfrac{\ln 3}{n} + 1 + \dfrac{\ln 4}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{2}\right)^n = \left(1 + \dfrac{\ln 12}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, puis l'on passe sous forme

exponentielle : $w_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{\ln 12}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\ln 12 + \circ(1)\right)$, d'où

$\boxed{w_n \sim \exp\left(\dfrac{\ln 12}{2}\right) = \sqrt{12}}$.

4. On a

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{n^2 \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120 n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{6}} \\
&= e^{n^2\left(-\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{72n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)} - e^{-\frac{1}{6}} \\
&= e^{-\frac{1}{6} - \frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{-\frac{1}{6}}\left(e^{-\frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) - e^{-\frac{1}{6}} \\
&= e^{-\frac{1}{6}}\left(1 - \frac{1}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - e^{-\frac{1}{6}} = -\frac{e^{-\frac{1}{6}}}{180n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .
\end{aligned}$$

Exercice 21

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético – géométrique.

Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

On considère désormais un réel $\alpha \neq 1$, et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$$

est géométrique de raison α.

2.a. Montrer qu'il existe un unique réel β tel que $u_1 = \alpha u_0 + \beta$.

2.b. Exprimer v_n en fonction de α, β, u_0 et n.

2.c. En déduire une expression de u_n en fonction de α, β, u_0 et n.

2.d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$. Conclure.

3. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético – géométrique si et seulement si il existe $q \neq 1$ et a, b non nuls tels que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n a + b .$$

On considérera ici qu'une suite arithmétique ou géométrique ***n'est pas*** *arithmético – géométrique.*

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant arithmético – géométrique, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$;

On a alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} - u_{n+1} = \alpha\, u_{n+1} + \beta - \alpha\, u_n - \beta = \alpha\left(u_{n+1} - u_n\right)$, donc

$\boxed{\text{la suite } \left(u_{n+1} - u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique (de raison } \alpha\text{)}}$.

2.a. Ben, $\beta = \alpha\, u_0 - u_1$ est évidemment l'unique réel convenable…

2.b. La suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison α, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \cdot \alpha^n$,

soit : $v_n = \left(u_1 - u_0\right) \cdot \alpha^n$, et comme $u_1 = \alpha\, u_0 + \beta$, on obtient $\boxed{v_n = \left(\left(\alpha - 1\right) u_0 + \beta\right) \cdot \alpha^n}$.

2.c. On déduit de la relation $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = u_{n+1} - u_n$ que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=0}^{n-1} v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0$$

(somme télescopique….).

Par ailleurs, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} v_n$ est géométrique (de raison différente de 1), et il résulte de **b.** que

$\sum_{k=0}^{n-1} v_n = \left(\left(\alpha - 1\right) u_0 + \beta\right) \cdot \dfrac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$. L'égalité $\boxed{u_n = u_0 + \left(\left(\alpha - 1\right) u_0 + \beta\right) \cdot \dfrac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}}$ s'ensuit.

2.d. • On a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha\, u_n - \beta &= u_0 + \left(\left(\alpha - 1\right) u_0 + \beta\right) \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} - \alpha\left(u_0 + \left(\left(\alpha - 1\right) u_0 + \beta\right)\right) - \beta \\ &= \left(1 - \alpha\right) u_0 + \left(\left(\alpha - 1\right) u_0 + \beta\right) \cdot \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} - \alpha\, \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\right) - \beta \\ &= \left(1 - \alpha\right) u_0 + \left(\left(\alpha - 1\right) u_0 + \beta\right) - \beta\ , \end{aligned}$$

donc $\boxed{u_{n+1} - \alpha\, u_n - \beta = 0}$.

• • Il résulte de ce qui précède qu'une suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético – géométrique si et seulement si la suite $\left(u_{n+1} - u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique (de raison différente de 1, si l'on considère qu'une suite arithmétique n'est pas arithmético – géométrique).

3. • S'il existe $q \neq 1$ et a, b non nuls tels que : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = q^n\, a + b$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q^{n+1}\, a + b = q\left(q^n\, a + b\right) + \left(1 - q\right) b = q\, u_n + \left(1 - q\right) b\ ,$$

avec $q \neq 1$ et $\left(1 - q\right) b \neq 0$, et ainsi la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético – géométrique.

• • Réciproquement, si $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético – géométrique, alors la suite $\left(u_{n+1} - u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \neq 1$, et d'après **2.c.**, il existe un réel β tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + \left(\left(q - 1\right) u_0 + \beta\right) \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{-\left(q - 1\right) u_0 - \beta}{1 - q}\, q^n + \frac{\beta}{1 - q}\ .$$

Alors, en posant $a = \dfrac{(q-1)u_0 + \beta}{q-1}$ et $b = \dfrac{\beta}{1-q}$: $\boxed{u_n = a q^n + b}$, et en outre $a \neq 0$ (sinon la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait constante, donc arithmétique, donc non arithmético – géométrique), et $b \neq 0$ (sans quoi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait géométrique).

Ceci achève de prouver l'équivalence demandée.

Exercice 22

Une suite homographique

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 9}{u_n - 1}$.

1. Montrer que l'équation $X = \dfrac{5X - 9}{X - 1}$ admet une unique solution réelle. On note α cette solution.

2. Pour tout $n \geq 0$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

3. En déduire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

1. On a $X = \dfrac{5X - 9}{X - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} X \neq 1 \\ X(X-1) = 5X - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \neq 1 \\ X^2 - 6X + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{X = 3}$.

On posera donc $\alpha = 3$.

2. En étudiant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5x - 9}{x - 1}$, on se convainc rapidement que $f(]3, +\infty[) =]3, +\infty[$: $]3, +\infty[$ est stable par f, et, comme u_0 appartient à cet intervalle : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]3, +\infty[$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 3$, et par conséquent la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ est bien définie.

De plus, on a pour tout entier n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\dfrac{5u_n - 9}{u_n - 1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3}$$
$$= \frac{u_n - 1}{2u_n - 6} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3}{2u_n - 6} = \frac{1}{2},$$

donc $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique}}$, de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + \dfrac{n}{2} = \dfrac{1+n}{2}$; on déduit ensuite de la relation $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ que $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3$, et l'on a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 + \dfrac{2}{1+n}}$.

Exercice 24

On considère la fonction numérique f définie par $\quad f(x) = \dfrac{e^{x}}{x+2}$.

1. Prouver que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $[0, 1]$, que l'on notera α.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Prouver que cette suite converge vers α.

3. Borner $f\,'$ sur $[0, 1]$ et en déduire : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha - u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2e}{9}\right)^{n}$.

4.a. En déduire la valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près,

4.b. Donner cette valeur approchée. *On écrira une fonction adaptée, en Python.*

1. L'idée est, comme d'habitude, d'étudier la fonction associée $g : x \mapsto \dfrac{e^{x}}{x+2} - x$;

cependant, on constate rapidement que l'étude du signe de sa dérivée est assez laide, il est donc utile d'améliorer un peu les choses : $g(0) \neq 0$, et, pour tout $x \in]0, 1]$, $g(x)$ a même signe que $e^{x} - x(x+2)$, puis, par croissance de la fonction $\ln$, $g(x)$ a même signe que $\ln\left(e^{x}\right) - \ln\left(x(x+2)\right) = x - \ln x - \ln(x+2)$.

On étudie donc sur $]0, 1]$ la fonction $h : x \mapsto x - \ln x - \ln(x+2)$. Cette fonction est dérivable, et pour tout $x \in]0, 1]$, $h\,'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x^{2} - 2}{x(x+2)}$. On en déduit aisément les variations de h :

x	0	1
$h\,'(x)$	$-$	
$h(x)$	$+\infty$ ↘	$1 - \ln 3$

La fonction h est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$, elle réalise donc une bijection de $]0, 1]$ vers $h(]0, 1])$, et l'on a $h(]0, 1]) = \left[h(x),\ \lim\limits_{0} h\right[= [1 - \ln 3,\ +\infty[$.

Comme $1 - \ln 3 < 0$, $0 \in [1 - \ln 3,\ +\infty[$, et l'on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Par conséquent, il existe également un unique réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$:

la fonction f admet un unique point fixe α dans $[0, 1]$.

Observons de plus, cela servira par la suite, que $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln 4 - \ln 3 > 0 = h(\alpha)$. La décroissance de h permet d'en déduire que $\frac{1}{2} < \alpha$.

2. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$, et : $\forall\ x \in [0,1]$, $f'(x) = \dfrac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$.

f est donc strictement croissante sur $[0,1]$; on en déduit que $f([0,\alpha]) \subset [f(0), f(\alpha)] = \left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$.

Il en résulte que $f([0,\alpha]) \subset [0,\alpha]$: l'intervalle $[0,\alpha]$ est stable par f.

Comme $u_0 = \frac{1}{2} \in [0,\alpha]$, ceci entraîne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\alpha]$.

La fonction f est croissante sur $[0,\alpha]$, on sait alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ; comme elle est de plus bornée (car à valeurs dans $[0,\alpha]$), le théorème de la limite monotone assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Enfin, puisque f est continue, la limite de f est un point fixe de f, appartenant à $[0,\alpha]$; la question **1.** a prouvé que α est le seul point fixe de f dans cet intervalle, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha}$.

On pourra remarquer que, dans ces conditions, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement croissante.

3. • La fonction f est deux fois dérivable, et :

$$\forall\ x \in [0\ 1],\ f''(x) = \frac{e^x(x+2)^2 - 2e^x(x+1)}{(x+2)^3} = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3} > 0.$$

On en déduit que pour tout $x \in [0\ 1]$, $\boxed{f'(0) = \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq f'(1) = \frac{2e}{9}}$.

•• Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \alpha$ (justifier ce point est facile : $u_0 \in [0,\alpha[$, et $[0,\alpha[$ est lui aussi stable par f…). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est continue sur $[u_n, \alpha]$, dérivable sur $]u_n, \alpha[$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_n \in]u_n, \alpha[$ tel que $f(u_n) - f(\alpha) = f'(c_n)\cdot(u_n - \alpha)$.

L'encadrement obtenu en • permet d'en conclure que $0 \leq f(\alpha) - f(u_n) \leq \frac{2e}{9}\cdot(u_n - \alpha)$, soit :

$$\boxed{0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{2e}{9}\cdot(u_n - \alpha)}.$$

••• L'encadrement : $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2e}{9}\right)^n}$ s'en déduit au prix d'une récurrence sans difficulté, que je passe.

4. D'après **3.** on est assuré que $0 \leq \alpha - u_n \leq 10^{-3}$ dès lors que $\frac{1}{2}\left(\frac{2e}{9}\right)^n \leq 10^{-3}$ $(*)$.

On a $(*) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\mathrm{e}}{9}\right)^n\right) \leq \ln\left(10^{-3}\right) \Leftrightarrow n \ln\frac{2\mathrm{e}}{9} \leq \ln 2 - 3\ln(10)$, d'où $(*) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 2 - 3\ln(10)}{\ln\frac{2\mathrm{e}}{9}}$:

changement de sens de l'inégalité, car $\ln\frac{2\mathrm{e}}{9}$ est négatif…

La calculatrice permet d'en tirer $(*) \Leftrightarrow n \geq 13$:

$$\boxed{\forall\ n \geq 13,\ u_n \text{ est une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}.$$

Elle prétend ensuite que $0{,}789 \leq u_n \leq 0{,}790$, et l'on en déduit que

$$\boxed{0{,}790 \text{ est une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}.$$

Exercice 25

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 4]$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique finie possible ℓ, que l'on déterminera.

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4}|u_n - \ell|$, puis que $|u_n - \ell| \leq \frac{3}{4^n}$.

4. Conclure.

1. Une brève étude de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$ prouve qu'elle est définie sur $]-\infty, 12]$, et qu'elle outre est décroissante ; on a donc $f([0,4]) \subset [f(4), f(0)]$, d'où : $f([0,4]) \subset \left[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right] \subset [0,4]$.

Ainsi, f est bien définie sur $[0,4]$, et cet intervalle est stable par f. On peut donc bien définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n} \end{cases}$ et l'on sait de plus que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,4]}$.

2. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et notons ℓ sa limite. L'application f étant continue, ℓ est un point fixe de f.

On a donc $\ell = \sqrt{12 - \ell}$, soit $\begin{cases} \ell \geq 0 \\ \ell^2 = 12 - \ell \end{cases}$. On en tire sans difficulté $\ell = 3$, et l'on en conclut que $\boxed{3 \text{ est l'unique limite finie possible de } f}$.

3. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est continue sur $\left[\overleftrightarrow{3, u_n}\right]$, dérivable sur $\left]\overleftrightarrow{3, u_n}\right[$ (car elle est dérivable sur $[0,4]$).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c_n \in \left]\overleftrightarrow{3, u_n}\right[$ tel que

$f(u_n) - f(3) = f'(c_n)\cdot(u_n - 3)$, d'où : $|u_{n+1} - 3| = \dfrac{1}{2\sqrt{12 - c_n}} \cdot |u_n - 3|$.

Comme $c_n \in \left]\overleftrightarrow{3, u_n}\right[\subset [1,4]$, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{12 - c_n}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{12 - 4}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{4}$, d'où :

$$\boxed{\left|u_{n+1} - 3\right| \leq \frac{1}{4} \cdot \left|u_n - 3\right|}.$$

•• L'inégalité $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - 3\right| \leq \frac{3}{4^n}}$ s'en déduit par une récurrence immédiate.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - 3\right| \leq \frac{3}{4^n}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{4^n} = 0$, donc par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$:

$\boxed{\text{la suite } \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 3}$.

Exercice 26

Soit la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 4]$.

2. Montrer que la suite $\left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et que la suite $\left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$. Déterminer les points fixes de l'application $f \circ f$.

4. Prouver que les suites $\left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, et conclure.

1. On va pas recommencer… cf. l'exercice **25.** .

2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$ étant monotone (décroissante), $f \circ f$ est croissante. Il en résulte que les suites $\left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, et de monotonies contraires.

Le calcul donne $u_1 = \sqrt{12}$, puis $u_2 = \sqrt{12 - \sqrt{12}} > 0 = u_0$; on en déduit que $\left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et la décroissance de $\left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ s'ensuit.

3. $f \circ f$ est la fonction $x \mapsto \sqrt{12 - \sqrt{12 - x}}$, et l'on a :

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{12 - \sqrt{12 - x}} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 12 \\ x^2 - 12 = \sqrt{12 - x} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{12} \leq x \leq 12 \\ \left(x^2 - 12\right) = 12 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{12} \leq x \leq 12 \\ x^4 - 24x^2 + 144 = 12 - x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{12} \leq x \leq 12 \\ x^4 - 24x^2 + x + 132 = 0 \end{cases},$$

d'où :

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{12} \\ (x - 3)(x + 4)\left(x^2 - x - 11\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{12} \\ x \in \left\{-4, 3, \frac{1 - \sqrt{45}}{2}, \frac{1 + \sqrt{45}}{2}\right\} \end{cases}.$$

Comme -4, $\dfrac{1-\sqrt{45}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{45}}{2}$ n'appartiennent pas à $\left[0, \sqrt{12}\right]$, on en déduit finalement que $\boxed{3 \text{ est l'unique point fixe de } f \circ f}$.

4. • On a montré que les suites $\left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires.

On a de plus prouvé qu'elles sont bornées, elles sont donc, d'après le théorème de la limite monotone, convergentes. Comme en outre $f \circ f$ est continue, leurs limites respectives sont des points fixes de cette application ; or on a vu que $f \circ f$ admet 3 pour unique point fixe ; on en conclut que $\lim \left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \lim \left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = 3$, et ceci achève de démontrer que $\boxed{\text{les suites } \left(u_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \left(u_{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$.

• • Les suites extraites des termes d'indices pairs et impaires de $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc vers la même limite, ce qui assure que $\boxed{\text{la suite } \left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 3}$.

Exercice 27

Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f \in C^2\left(\left[a, b\right], \mathbb{R}\right)$. On suppose que :

$$f\left(a\right) > 0\ ,\ f\left(b\right) < 0\ ,\ f' < 0 \text{ et } f'' > 0 \text{ sur } \left[a, b\right].$$

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in \left]a, b\right[$ tel que $f\left(c\right) = 0$.

2. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f\left(u_n\right)}{f'\left(u_n\right)}$.

Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et converge vers c.

3. On note respectivement m et M le minimum de $\left|f'\right|$ et le maximum de $\left|f''\right|$ sur $\left[a, b\right]$.

a. Montrer que pour tout entier n : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \dfrac{M}{2m}\left(c - u_n\right)^2$.

b. Montrer qu'il existe deux constantes A et q telles que pour tout entier n :

$$0 \leq c - u_{n+1} \leq \frac{1}{A} q^{2^n}.$$

Conclure.

Rappelons que la méthode de Newton, également appelée ***méthode des tangentes***, permet de déterminer une approximation d'une solution d'une équation du type $f\left(x\right) = 0$, en construisant une suite convergeant vers la solution de cette équation.

Naturellement, la fonction f doit vérifier certaines conditions pour que cette méthode aboutisse, conditions que l'énoncé fournit évidemment.

1. La fonction f est continue, strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$, et $f(a) f(b) < 0$. D'après le ***théorème des valeurs intermédiaires strict***, $\boxed{\text{il existe donc un unique réel } c \in \left]a, b\right[\text{ tel que } f(c) = 0}$.

2.a. et **2.b.** • La fonction $g : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est bien définie, de classe C^1 sur $[a, c]$, et pour tout $x \in [a, c]$:

$$g'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x) f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f(x) f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} > 0.$$

Il en résulte que g est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a, c]$; elle réalise donc une bijection de $[a, c]$ vers $[g(a), g(c)]$.

De plus : $g(c) = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)} = c$ car $f(c) = 0$, et $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} > a$ car $f(a) > 0$, et $f'(a) > 0$. On a donc $g([a, c]) = [g(a), g(c)] \subset [a, c]$.

Maintenant :

• $u_0 = a$ appartient à l'intervalle $[a, c]$, sur lequel la fonction g est bien définie, et qui est stable par g ; la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc bien définie, et à valeurs dans $[a, c]$ (on peut, si l'examinateur le demande, prouver cela par une récurrence facile).

• La fonction g étant croissante sur $[a, c]$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone. Elle est évidemment bornée (pour tout n, $a \leq u_n \leq c$), donc (d'après le ***théorème de la limite monotone***) $\boxed{(u_n)_{n \geq 0} \text{ est convergente}}$. Notons ℓ sa limite.

• La fonction g étant continue sur $[a, c]$, ℓ est un point fixe de g : $g(\ell) = \ell$, ce qui revient à dire que $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, ou encore que $f(\ell) = 0$. Or on sait que c est le seul point de $[a, b]$ en lequel f s'annule. Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 0} \text{ converge vers } c}$.

3.a. Les fonctions $|f'|$ et f'' sont continues sur le segment $[a, b]$, elles y admettent donc un maximum et un minimum : $m = \min\limits_{[a,b]} |f'|$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f''$ sont bien définis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c - u_{n+1} = c - u_n + \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \frac{f(u_n) + (c - u_n) f'(u_n)}{f'(u_n)}.$$

La fonction f est de classe C^2 sur $[u_n, c]$, d'après la formule de Taylor – Laplace, on a donc :

$$f(c) = f(u_n) + (c - u_n) f'(u_n) + \int_{u_n}^{c} (c - t) f''(t)\, \mathrm{d}t.$$

Comme $f(c) = 0$, on obtient $c - u_{n+1} = -\dfrac{\displaystyle\int_{u_n}^{c} (c - t) f''(t)\, \mathrm{d}t}{f'(u_n)}$.

On retrouve ainsi le fait que $c - u_{n+1} \geq 0$, et on a : $\boxed{c - u_{n+1} \leq \frac{1}{m} \int_{u_n}^{c} (c-t) M \, dt \leq \frac{M}{2m} (c - u_n)^2}$.

3.b. Posons $q = \frac{M}{2m}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{H}(n)$ par

$$\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow 0 \leq c - u_n \leq \frac{1}{q} \left(q \left(c - u_0 \right) \right)^{2^n} .$$

Initialisation

On a $0 \leq c - u_0 = \frac{1}{q} \left(q \left(c - u_0 \right) \right)^{2^0}$, d'où $\mathcal{H}(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$. Alors d'après **a.**, $0 \leq c - u_{n+1} \leq q \left(c - u_n \right)^2$, d'où par hypothèse de récurrence,

$$0 \leq c - u_{n+1} \leq q \left[\left(\frac{1}{q} \left(q \left(c - u_0 \right) \right)^{2^n} \right) \right]^2,$$

soit : $0 \leq c - u_{n+1} \leq \frac{1}{q} \left(q \left(c - u_0 \right) \right)^{2^{n+1}}$.

Conclusion

On a $\mathcal{H}(0)$ et la propriété $\mathcal{H}$ est héréditaire, d'où $\mathcal{H}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cet encadrement assure que la convergence de $\left(u_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers c est très rapide : à partir d'un certain rang k, on a $a = q \left(c - u_k \right) < 1$, et alors la différence $c - u_n$ tend vers 0 plus vite que $K . a^{2^n}$ (K constante).

Exercice 30

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\left(\boldsymbol{E}_n \right)$ l'équation $\left(\boldsymbol{E}_n \right)$: $x^n - x = n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\left(\boldsymbol{E}_n \right)$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}^+$, et prouver que $u_n \in [1, +\infty[$.

2. Montrer que quel que soit $n \geq 2$, $n^{\frac{2}{n}} \leq n$. En déduire la limite de $\left(u_n \right)_{n \geq 2}$.

3. On pose $v_n = u_n - 1$.

Vérifier que $n \ln \left(v_{n+1} \right) = \ln \left(v_n + n - 1 \right)$. En déduire que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

1. Pour tout $n \geq 2$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n - x - n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = n x^{n-1} - 1$.

On en déduit que :

- f_n est décroissante sur $\left[0 , n^{-\frac{1}{n-1}} \right]$, avec $f_n(0) = -n < 0$. Par conséquent, f_n est strictement négative sur

$\left[0 , n^{-\frac{1}{n-1}} \right]$, et ne s'annule donc pas.

•• f_n est ensuite croissante sur $\left[n^{-\frac{1}{n-1}} , +\infty \right[$. Elle est continue sur cet intervalle, on vient de voir que $f_n\left(n^{-\frac{1}{n-1}} \right) < 0$, et l'on a $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$; le théorème des valeurs intermédiaires strict assure donc que f_n s'annule en un unique point de $\left[n^{-\frac{1}{n-1}} , +\infty \right[$.

Finalement, $\boxed{(\boldsymbol{E}_n) \text{ admet une unique solution } u_n \text{ sur } \mathbb{R}^+}$, pour tout $n \geq 2$.

En outre, ce qui précède prouve que f_n est positive sur $\left[u_n , +\infty \right[$ (et négative sur $\left[0, u_n \right]$). Comme $f_n(1) = -n < 0$, on en conclut que $\boxed{u_n > 1}$.

2. • Pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{2}{n} \leq 1$, donc $\boxed{n^{\frac{2}{n}} \leq n}$.

•• Il est alors naturel, pour exploiter ce résultat, de chercher à déterminer le signe de $f_n\left(n^{\frac{2}{n}} \right)$.

On a $f_n\left(n^{\frac{2}{n}} \right) = n^2 - n^{\frac{2}{n}} - n$, et d'après ce qui précède, $f_n\left(n^{\frac{2}{n}} \right) = n^2 - 2n = n(n-2) \geq 0$.

Or on a dit que f_n est négative sur $\left[0, u_n \right]$, positive sur $\left[u_n , +\infty \right[$. Par conséquent, $n^{\frac{2}{n}} \geq u_n$.

On sait maintenant que $1 \leq u_n \leq n^{\frac{2}{n}}$; comme $n^{\frac{2}{n}} = e^{2\frac{\ln}{n}}$ tend vers 0 par croissance comparée, on en conclut, par encadrement, que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.

3. • On a pour tout $n \geq 2$, $n \ln(v_n + 1) = n \ln(u_n) = n \ln(u_n^n)$. La relation $u_n^n = u_n + n$ permet d'en déduire que $n \ln(v_n + 1) = \ln(u_n + n) = \boxed{\ln(v_n + n - 1)}$.

•• On a donc $n \ln(v_n + 1) = \ln\left(n\left(1 + \dfrac{v_n - 1}{n} \right) \right) = \ln n + \ln\left(1 + \dfrac{v_n - 1}{n} \right)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, ce qui entraîne, d'une part que $\ln(v_n + 1) \sim v_n$, et d'autre part que $\ln\left(1 + \dfrac{v_n - 1}{n} \right) = \circ(\ln n)$, d'où $\ln\left(n\left(1 + \dfrac{v_n - 1}{n} \right) \right) = \ln n + \ln\left(1 + \dfrac{v_n - 1}{n} \right) \sim \ln n$.

L'équivalence $n v_n \sim \ln n$ en découle, on a donc bien $\boxed{v_n \sim \dfrac{\ln n}{n}}$.

Remarquons que ceci nous permet d'écrire un début de développement asymptotique pour la suite $\left(u_n\right)_{n \geq 2}$, puisque l'on a maintenant $\boxed{u_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + \circ\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$.

Exercice 32

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et telle que $f(0) = 0$.

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{f'(0)}{2}$. *On pourra utiliser une formule de Taylor.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, la fonction f est de classe C^2 sur $\left[0, \frac{k}{n^2}\right]$. La formule de Taylor avec reste intégral donne : $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + \frac{k}{n^2} f'(0) + \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) f''(t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{n^2} f'(0) + \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) f''(t)\,\mathrm{d}t$.

On en déduit que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) f''(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n+1}{2n} f'(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) f''(t)\,\mathrm{d}t$.

Or en notant M un majorant de la fonction continue $|f''|$ sur le segment $[0,1]$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) \mathrm{d}t = M \sum_{k=1}^{n} \left[-\left(\frac{k}{n^2} - t\right)^2\right]_0^{\frac{k}{n^2}},$$

d'où $\left|\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) f''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4} = M \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3}$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{k}{n^2}} \left(\frac{k}{n^2} - t\right) f''(t)\,\mathrm{d}t = 0$, puis que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} f'(0) = \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 33

Une source inépuisable d'exercices

1. Etudier la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$, et par les relations de récurrence :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\left(1 + u_n^2\right)^2}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $v_n = u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$.

Montrer qu'il existe un unique réel α, que l'on déterminera, tel que $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ ***non nul***, réel que l'on déterminera également.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

4. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Il est clair que la suite (u_n) est bien définie, et qu'elle est à valeurs positives. En posant pour tout x,

$f(x) = \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$, on a pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = x\left(\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2} - 1\right) \leq 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

Elle de plus minorée (par 0), le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge. En notant ℓ sa limite, on a par continuité de f: $f(\ell) - \ell = 0$. On en conclut, finalement, que la suite (u_n) tend vers 0 en décroissant.

2. On a $v_n = u_n^{\alpha}\left(\left(1+u_n^2\right)^{-2\alpha} - 1\right)$. Comme $\lim u_n = 0$, on en tire :

$v_n = u_n^{\alpha}\left(1 - 4\alpha u_n^2 - 1 + \circ\left(u_n^{2\alpha}\right)\right) = -4\alpha u_n^{\alpha+2} + \circ\left(u_n^{\alpha+2}\right)$.

Ainsi, (v_n) admet une limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = -2$, et dans ce cas $\lim v_n = 8$.

3. Il s'agit ici de prouver le très classique ***lemme de Cesàro***.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_0 tel que pour tout $n > N_0$, $8 - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq 8 + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On a pour tout $n > N_0$, $w_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} v_k + \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=N_0+1}^{n} v_k$, d'où

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} v_k + \frac{n-N_0}{n+1}\left(8 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq w_n \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} v_k + \frac{n-N_0}{n+1}\left(8 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ensuite, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} v_k + \dfrac{n-N_0}{n+1}\left(8 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) = 8 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} v_k + \dfrac{n-N_0}{n+1}\left(8 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) = 8 + \dfrac{\varepsilon}{2}$, il existe donc un entier $N_1 > N_0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} v_k + \dfrac{n-N_0}{n+1}\left(8 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \geq 8 - \varepsilon$ et

$\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N_0} v_k + \dfrac{n-N_0}{n+1}\left(8 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leq 8 + \varepsilon$.

Alors pour tout $n \geq N_1$, $8 - \varepsilon \leq w_n \leq 8 + \varepsilon$, et l'on a prouvé que $\boxed{\lim w_n = 8}$.

4. $w_{n-1} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2}\right) = \dfrac{1}{n}\left(u_n^{-2} - u_0^{-2}\right)$ par télescopage. On en déduit que

$u_n^{-2} - u_0^{-2} \underset{n\to+\infty}{=} 8n + \circ(n)$, d'où $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{2n}}}$.

Exercice 34

Soit $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \left|z_n\right|\right).$$

1. Montrer que la suite $\left(\left|z_n\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. *On notera* ρ *sa limite.*

2. Prouver alors que la suite $\left(z_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|z_{n+1}\right| = \frac{1}{2}\left|z_n + \left|z_n\right|\right|$, d'où par inégalité triangulaire, $\left|z_{n+1}\right| \leq \left|z_n\right|$. La suite $\left(\left|z_n\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), d'après le théorème de la limite monotone elle converge.

2. Posons $z_0 = \rho_0\, e^{i\theta}$, avec $\theta \in [-\pi, \pi]$. Si $\theta = 0$, z_0 est un réel positif, et l'on voit facilement que la suite $\left(\left|z_n\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Supposons désormais θ non nul. On a $z_1 = \frac{\rho_0}{2}\left(e^{i\theta} + 1\right) = \rho_0 \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} = \rho_0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$; on montre par une récurrence sans difficulté que de manière générale : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = \rho_0 \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\right) e^{i\frac{\theta}{2^n}}$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant que $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ est non nul :

$$\begin{aligned}
z_n &= \rho_0 \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\frac{\theta}{2^n}} \\
&= \rho_0 \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\frac{\theta}{2^n}} \\
&= \rho_0 \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)}{2^2\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\frac{\theta}{2^n}} \ldots
\end{aligned}$$

en fin de compte, on obtient $z_n = \rho_0 \frac{\cos(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$. Par suite, $z_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \rho_0 \frac{\cos(\theta)}{2^n \frac{\theta}{2^n}}$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} z_n = \rho_0 \frac{\cos(\theta)}{\theta}}.$$