Intégration

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

I Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

1. Fonctions continues par morceaux

Définition 1 (fonctions continues par morceaux sur un segment)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$.

On dit que f est continue par morceaux lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

- f admet un nombre fini de points de discontinuité ;
- f admet une limite à gauche finie en tout point distinct de a, et une limite à droite finie en tout point différent de b.

Autrement dit,

Définition 2 (fonctions continues sur un segment, bis)

$f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux ssi il existe une subdivision $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de $[a, b]$, avec $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$, telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ est continue, admet une limite finie à gauche en a_{k+1} et une limite à droite en a_k. Cela revient encore à dire que la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$.

Définition 3 (fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux si et seulement f est continue par morceaux sur tout segment de I.

2. Espace des fonctions continues par morceaux sur un intervalle

L'ensemble $C_{mx}(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur I, est un sous – espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, stable par produit.

3. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

a. Définition

- Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue, admettant une limite finie à droite en a, et une limite finie à gauche en b.
  Alors, f se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme étant l'intégrale sur $[a, b]$ de ce prolongement, et on la note encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

•• Soient à nouveau a, b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue, admettant une limite finie à droite en a, et une limite finie à gauche en b.

Alors, f se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme étant l'intégrale sur $[a, b]$ de ce prolongement, et on la note encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Propriétés

L'opérateur intégral sur $C_{mx}([a, b], \mathbb{K})$ hérite naturellement des propriétés de l'opérateur intégral sur $C^0([a, b], \mathbb{K})$, et en particulier :

Linéarité

$$\forall (f, g) \in \left(C_{mx}([a, b], \mathbb{K})\right)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Positivité (isotonie)

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, $a < b$, et à valeurs positives : alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$, et

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow (f$ est identiquement nulle, sauf éventuellement en un nombre fini de points$)$.

Relation de Chasles :

Pour f continue par morceaux, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Inégalité de Cauchy – Schwarz

Pour f et g continues par morceaux : $\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t}$.

En outre, si f et g sont continues : il y a égalité dans l'inégalité si et seulement si f et g sont liées.

Rappelons que les $|\;|^2$ *sont nécessaires lorsque les fonctions mises en jeu sont à valeurs dans* $\mathbb{C}$. *Si elles sont à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *l'inégalité de Cauchy – Schwarz s'écrit plus simplement :*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}}.$$

II Intégrales généralisées ou impropres

1. Intégrale impropre

"Définition"

Considérons un intervalle I (non singulier) ; notons respectivement a et b la borne inférieure et la borne supérieure de I, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $\alpha \in \{a, b\}$.

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite ***généralisée*** en α lorsque l'un des problèmes suivants survient :

- • $\alpha = \pm\infty$;
- •• α est fini et f n'est pas définie en α ;
- ••• α est fini et f n'est pas continue par morceaux au voisinage de α.

Premiers exemples

- • L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ n'est généralisée qu'en 0, car la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, 1]$.
- •• $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ n'est généralisée qu'en 0 et en $+\infty$, car la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ••• $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ n'est généralisée qu'en $+\infty$, car la fonction intégrée est continue.

2. Convergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert

a. Définition 1 : convergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$

Soit a un réel, et soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente lorsque la fonction $\left(\begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$ admet une limite finie

  lorsque x tend vers $+\infty$. Lorsque tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ la valeur de cette limite :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

sous réserve que cette limite existe et soit finie.

- Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on dit également que cette intégrale existe, ou a un sens. Dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge.

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est dire si cette intégrale converge, ou si elle diverge.

b. Définition 2 : convergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle $[a, b[$

***Définition* 2**

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, b[$.

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (impropre en b et seulement en ce point) est dite ***convergente*** si et seulement si la fonction $F : \begin{cases} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-.

◦ Lorsque tel est le cas, on pose $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in [a, b[}} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right)$.

◦◦ Si $\lim\limits_{x \to b^-} \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right)$ n'existe pas, ou est infinie, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***diverge*** (ou n'a pas de sens).

Premiers exemples

- Considérons l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - t}}$ est continue sur $[0, 1[$, donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t}}$ est une intégrale impropre en 1, et seulement en ce point. On a pour tout $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t}} = \left[-2\sqrt{1 - t} \right]_0^x = 2 - \sqrt{1 - x}$, et $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$. Par conséquent, $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ converge, et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t}} = 2 - 0 = 2}$.

•• Soit maintenant l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 - t}$. De la même façon, J n'est généralisée qu'en 1, car la fonction intégrée est continue sur $[0, 1[$. Pour tout $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 - t} = \left[-\ln(1 - t) \right]_0^x = -\ln(1 - x)$; comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\ln(1 - x) \right) = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } J \text{ est divergente}}$.

b. Cas d'un intervalle $]a, b]$

Définition 3

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $-\infty \leq a < b < +\infty$.

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $]a, b]$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (impropre en a et seulement en ce point) est dite ***convergente*** si et seulement si la fonction $F : \begin{cases}]a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+.

◦ Lorsque tel est le cas, on pose $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in]a, b]}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

◦◦ Si $\lim\limits_{x \to a^+} \left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)$ n'existe pas, ou est infinie, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***diverge*** (ou n'a pas de sens).

Vocabulaire

- La **nature** d'une intégrale généralisée est son caractère convergent ou divergent.

•• Deux intégrales généralisées sont dites **de même nature** lorsqu'elles convergent ou divergent simultanément.

III Intégrales de référence

Constat 1 ***(intégrales du type*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$***)***

Soit λ un réel.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\lambda > 0}$, et dans ce cas $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}}$.

Constat 2 ***(convergence de*** $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$***)***

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ converge, et $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t = -1$.

Constat 3 ***(intégrales de Riemann en*** $\boxed{+\infty}$***)***

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1}$.

Constat 4 ***(intégrales de Riemann en*** $\boxed{0}$***)***

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\boxed{\alpha < 1}$.

IV Premières propriétés

1. Invariance de nature par "changement de borne propre"

Proposition

1. Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leq +\infty$, et soit $c \in \,]a, b[$.

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, b[$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

De manière analogue :

2. Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $-\infty \leq a < b < +\infty$, et soit $c \in \,]a, b[$.

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $]a, b]$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

2. Intégrales partielles, intégrales restes

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[\, a , b \,[$.

Définition

- Les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sont appelées ***intégrales partielles*** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- • Les intégrales $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont appelées ***restes*** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition

Les intégrales restes $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont définies si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et, lorsque tel est le cas, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to b} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$.

Les définitions et la propriété s'adaptent naturellement au cas où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est généralisée en a .

3. Expression en termes de primitives

Considérons une fonction f **continue** sur un intervalle $[\, a , b \,[$. Alors f y admet une primitive F , et l'on peut écrire que pour tout $x \in [\, a , b \,[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Par suite, l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente si et seulement si } F \text{ admet une limite finie en } b}$, et dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$.

Dans le cas où b est réel, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente ssi F admet un prolongement par continuité en b .

De la même façon, lorsque f est continue sur $]\, a , b \,]$:

> l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si une primitive F de f sur $]\, a , b \,]$ admet une limite finie en a , et
>
> lorsque tel est le cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - \lim_{x \to a^+} F(x)$.

4. Relation de Chasles

a. Extension de la notion d'intégrale généralisée

Définition

Soit $(a , b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et $I = \left|\, a , b \,\right|$ l'un des intervalles d'extrémités a et b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $\left(a_k \right)_{k \in \; 0, n}$ une **subdivision** de I,

i.e. des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$.

Notons $c_1, \dots, c_n$ n réels tels que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_{k-1} < c_k < a_k$; on a

donc $a = a_n < c_1 < a_1 < \dots < a_{n-1} < c_n < a_n = b$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I \setminus \{ a_0, \dots, a_n \}$.

On dit que f **admet une intégrale généralisée**, ou **impropre**, sur I, ou encore que l'intégrale de f sur I **converge**, ou **existe**, lorsque les intégrales $\displaystyle\int_{a_{k-1}}^{c_k} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c_k}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, sont **toutes** convergentes. Dans ce cas, on **définit** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en validant la relation de Chasles :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{a_{k-1}}^{c_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_k}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right)}.$$

b. Remarques

Avec les notations ci – dessous :

- Si l'une au moins des intégrales $\displaystyle\int_{a_{k-1}}^{c_k} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{c_k}^{a_k} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

•• En pratique, $\boxed{\text{on sépare effectivement les problèmes de convergence}}$. Par exemple, on étudiera la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ en déterminant celles de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln t}\,\mathrm{d}t$,

$\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

••• Le programme écarte l'étude d'intégrales qui seraient généralisées en un point intérieur de l'intervalle. On retiendra donc surtout de ce qui précède qu'en particulier, si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est généralisée qu'en a et b, et si $c \in \left]a, b\right[$,

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes deux convergentes, et dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. Conséquences de la définition

- La relation de Chasles est toujours vérifiée pour les intégrales généralisées.

•• En particulier, si $a > b$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on convient que :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t}, \text{ et } \boxed{\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0}.$$

5. Linéarité

Proposition

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, et soit I un intervalle d'extrémités a et b.

- L'ensemble E des fonctions (à valeurs dans $\mathbb{K}$) dont l'intégrale sur l'intervalle I converge est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

- • L'application $\Phi : \left(\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur E.

Corollaire

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

- • Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- •• Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

◦◦◦◦ Par contre, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ divergent, ***on ne peut rien dire*** sur la nature de $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ …

Proposition **(cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$)**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, I intervalle d'extrémités a et b. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent, et lorsque tel est le cas : $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$.

6. Relation d'ordre

Proposition **1**

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b. Soit f une application telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On suppose que f est ***positive*** sur I, *i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Corollaire

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b.

Soient f et g deux applications à valeurs réelles telles que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. On suppose que $f \leq g$.

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque

C'est un premier pas vers les théorèmes de comparaison pour les fonctions positives…

Proposition 2

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b.

Soit f une application à valeurs réelles telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On suppose que :

- • $f \geq 0$.
- •• $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- ••• f est **continue** sur $\overset{\circ}{I}$.

Alors f est identiquement nulle sur $]a, b[$.

7. Intégrations par parties et changements de variables

a. Intégration par parties

Notation

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités a et b.

On dit que le crochet généralisé $[f]_a^b$ converge lorsque f admet une limite finie en b et en a.

Lorsque tel est le cas, on pose : $[f(t)]_a^b = \lim_b f - \lim_a f$.

Théorème (intégration par parties)

Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle d'extrémités a et b.

On suppose que la fonction produit $f \times g$ admet une limite finie en a et en b.

Alors les intégrales $\int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence : $\int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)\,g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Changements de variables

Théorème (changements de variables)

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ de classe C^1, bijective et strictement croissante ; soit f une fonction continue par morceaux sur I.

Alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature, et, en cas de convergence, elles sont égales.

Exemples

$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, $J = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$.

V Critères de convergence

1. Théorème fondamental

a. Théorème de convergence par majoration pour les intégrales de fonctions positives

***Théorème* 1**

Soit f continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$, à valeurs réelles positives sur cet intervalle.

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $F : \begin{cases} [a, b[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$

est majorée sur $[a, b[$.

***Théorème* 2**

Soient f, g continues par morceaux sur un intervalle $[a, b[$, à valeurs réelles, telles que :

$$\forall x \in [a, b[, \quad 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Alors,

- si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
- si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarques

- Naturellement, ces deux résultats restent valables dans le cas de fonctions positives, continues par morceaux sur un intervalle $]a, b]$.
- $\boxed{\text{Si } I = [a, b[}$, il suffit de supposer que : $\exists c \in I \ / \ \forall t \in [c, b[, \ 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

  $\boxed{\text{Si } I =]a, b]}$, itou avec $t \in]a, c]$…

***Preuve du théorème* 1**

La fonction f étant positive, $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une fonction croissante. Le théorème de la limite monotone assure donc que F admet une limite finie en b^- si et seulement si elle est majorée. Par définition de la convergence d'une intégrale impropre, ceci revient à dire que $\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } F \text{ est majorée}}$.

***Preuve du théorème* 2**

- Supposons que l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, posons alors $M = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $0 \leq f \leq g$, $x \in [a, b[$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq M$. Ainsi, f est à valeurs positives, et la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est croissante. Le théorème de convergence par majoration pour les intégrales de fonctions positives (sous sa première version) assure que $\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

•• On en déduit, par contraposition, que $\boxed{\text{si } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge, alors } \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}}$.

b. Exemples

***Exemple* 1 :** déterminons la nature de $I = \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction intégrée étant continue sur $]0, 1]$, cette intégrale n'est généralisée qu'en 0. On note de plus que $t \mapsto \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est à valeurs négatives sur $]0, 1]$, on s'intéresse donc à l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On a pour tout $t \in]0, 1]$: $0 \leq -\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t} = -\ln(t)\,\mathrm{e}^{-0} = -\ln(t)$, et l'on sait que l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème de convergence par majoration pour les intégrales de fonctions positives assure alors que $\int_0^1 -\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ est convergente}}$.

Exemples* 2 , *et* 3 , *et …

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{\pi/2} \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x$; **2.** $J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; **3.** $K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + \sqrt{x}}$;

4. $L = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\cos x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **5.** $M = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Théorème de comparaison (bis) (versions o et O)

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b,

$(f, g) \in \left(C_{mx}\left(I, \boxed{\mathbb{R}_+}\right)\right)^2$ continues par morceaux et **positives** sur l'intervalle I.

- $\boxed{\text{Si } I = [a, b[}$ On suppose que $f = o_{b^-}(g)$ (*resp.* $f = O_{b^-}(g)$).

•• $\boxed{\text{Si } I =]a, b]}$ On suppose que $f = o_{a^+}(g)$ (*resp.* $f = O_{a^+}(g)$).

Alors, dans tous les cas, $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème de comparaison (ter) (règle des équivalents)

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b,

$(f, g) \in \left(C_{mx}\left(I, \boxed{\mathbb{R}_+}\right)\right)^2$ continues par morceaux sur l'intervalle I.

- $\boxed{\text{Si } I = [a, b[}$ On suppose que f est positive au voisinage de b^-, et que $f \underset{b^-}{\sim} g$.

•• $\boxed{\text{Si } I =]a, b]}$ Itou avec a^+ au lieu de b^-.

Alors, dans les deux cas, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarque : comme $f \underset{b^-}{\sim} g$, f $\boxed{\textbf{et}}$ g sont positives au voisinage de b^-.

2. Convergence absolue et semi – convergence

Définition

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b,

$f \in C_{mx}(I, \mathbb{K})$ continue par morceaux sur l'intervalle I (donc $|f|$ is, too…).

On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge absolument**, lorsque $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème (la convergence absolue entraîne la convergence)

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b,

et $f \in C_{mx}(I, \mathbb{K})$ une application continue par morceaux sur l'intervalle I.

- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

  Dans ce cas, on a en outre : $\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t}$.

◦ ◦ La réciproque de l'assertion précédente est **fausse**, l'exemple – type est celui de l'**intégrale de Dirichlet** :

On montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge, mais que $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge.

Exemple

Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$.

Définition 2 (intégrales semi – convergentes)

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b, $f \in C_{mx}(I, \mathbb{K})$ continue par morceaux sur l'intervalle I (donc $|f|$ l'est aussi).

Si $\int_a^b f(t)\, dt$ converge mais ne converge pas absolument, on dit que cette intégrale est **semi – convergente**.

Preuve du théorème : cas réel

Supposons par exemple que $\int_a^b f(t)\, dt$ n'est généralisée qu'en b. On définit deux fonctions f^+ et f^- de la façon suivante : $\forall x \in [a, b[,\ f^+(x) = \frac{1}{2}\left[\, |f(x)| + f(x) \,\right]$, et $f^-(x) = \frac{1}{2}\left[\, |f(x)| - f(x) \,\right]$.

La fonction valeur absolue est continue ; par composition, la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est également continue par morceaux ; il en résulte que les fonctions f^+ et f^- sont elles aussi continues par morceaux.

En outre, les fonctions f^+ et f^- sont positives : en effet, si $f(x)$ est positif, $f^+(x) = f(x)$ et $f^-(x) = 0$; si $f(x)$ est négatif, $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = -f(x)$.

De plus : $\forall x \in [a, b[,\ f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

La positivité des fonctions f^+ et f^- entraîne alors que :

$$\forall x \in [a, b[,\ 0 \leq f^+(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|.$$

Or l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ converge ; d'après le critère d'intégrabilité pour les fonctions positives, les intégrales $\int_a^b f^+(t)\, dt$ et $\int_a^b f^-(t)\, dt$ sont donc elles aussi convergentes.

Enfin : $\forall x \in [a, b[,\ f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, ce qui, par linéarité, prouve la convergence de $\int_a^b f(t)\, dt$.

En cas de convergence, on note que : $\forall t \in [a, b[,\ -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$. Par croissance de l'intégrale généralisée (toutes les intégrales rencontrées étant convergentes), il vient alors :

$$-\int_a^b |f(t)|\, dt \leq \int_a^b f(t) \leq \int_a^b |f(t)|\, dt, \text{ soit : } \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Cas complexe

Supposons que f est à valeurs complexes, et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. On a $|\mathrm{Re}(f)| \leq |f|$ et

$|\mathrm{Im}(f)| \leq |f|$, donc $\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ convergent absolument. Ainsi, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, si l'on suppose par exemple l'intégrale généralisée uniquement en b : pour tout $x \in [a, b[$,

$\left| \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$. L'inégalité $\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ s'en déduit par passage à la limite.

3. Quelques critères supplémentaires

a. En une borne finie : intégrales faussement impropres

Proposition

Soient $(a, b) \in \boxed{\mathbb{R}^2}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b.

Soit $f \in C(I, \mathbb{K})$ une application $\boxed{\textbf{continue}}$ sur I. Si l'application f est prolongeable par

continuité au segment $[a, b]$ en une application $\tilde{f}$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et :

$$\boxed{\underbrace{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{deuxième année}} = \underbrace{\int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{TS et } 1^{\text{ère}} \text{ année}}}\ .$$

En particulier, si $f \in C([a, b], \mathbb{K})$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et

coïncide avec l'ancienne définition de l'intégrale, d'où le nom d'intégrale **généralisée**.

Exemples

- • $\int_0^1 \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.
- •• $\int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.
- ••• $I_k = \int_0^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

b. En une borne finie : cas de fonctions bornées

Il résulte du théorème de convergence absolue l'étonnante propriété suivante :

Soient $(a, b) \in \boxed{\mathbb{R}^2}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I un intervalle d'extrémités a et b.

Soit $f \in C(I, \mathbb{K})$ une application $\boxed{\textbf{bornée}}$ sur I. Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Autrement dit, si l'intervalle et l'application sont bornées, l'intégrale est forcément convergente…

c. En une borne infinie : une vague notion de divergence grossière

Soit maintenant f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, +\infty[$. Alors :

- Si f admet en $+\infty$ une limite ℓ **non nulle**, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

  On pourra dire, dans ce cas, que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge grossièrement.

◦ Par contre, si $\lim_{+\infty} f = 0$, on ne peut rien dire, voir par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

◦ ◦ **ET SURTOUT, SURTOUT… GROSSE DIFFÉRENCE AVEC LES SÉRIES NUMÉRIQUES :**

$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ peut converger sans que $\lim_{+\infty} f = 0$, et même sans que f ne soit bornée au voisinage de $+\infty$,

je vais donner un exemple…

Exemple

Etudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\,\sin\left(t^2\right) dt$.

VI Fonctions intégrables sur un intervalle

1. Fonctions intégrables

Définition

Une fonction f est dite intégrable sur un intervalle I lorsque l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

On note alors $\int_I f$ son intégrale (impropre ou non) sur I (bornes automatiquement « dans le bon ordre »).

Théorème

Soit I un intervalle d'extrémités a et b, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i – La fonction f est intégrable sur I.

ii – Il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout segment J inclus dans I : $\int_J |f| \leq M$.

2. Traduction de résultats précédents en termes de fonctions intégrables

a. Structure d'espace vectoriel ; relation de Chasles

Proposition (structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. *Alors*,

- Alors $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, muni des lois naturelles, est $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

- •• L'application $\Phi : \begin{pmatrix} \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \int_I f \end{pmatrix}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$.

Remarque

Notons ici $\mathcal{L}^1_{mx}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. Alors $\mathcal{L}^1_{mx}(I,\mathbb{K})$ est encore un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\Phi : \begin{pmatrix} \mathcal{L}^1_{mx}(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \int_I f \end{pmatrix}$ reste une forme linéaire sur cet espace.

Proposition (relation de Chasles)

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $\overline{I \cup J}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. *Alors,*

- Toute fonction intégrable sur I et sur J, est intégrable sur $I \cup J$.
- •• Si de plus $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, alors, pour toute fonction f intégrable sur I et sur J : $\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f$.

b. Théorèmes de convergence par comparaison

Théorème

Soient f, g continues par morceaux sur un intervalle $I = [a, b[$, à valeurs réelles.

- On suppose que $\forall x \in I, \ |f(x)| \leq |g(x)|$. Alors si g est intégrable sur I, f l'est aussi.
- •• On suppose que $f \underset{b}{=} o(g)$, ou que $f \underset{b}{=} O(g)$ Alors si g est intégrable sur I, f l'est aussi.
- ••• On suppose que $|f| \underset{b}{\sim} |g|$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si g est intégrable sur I.

VII Intégration terme à terme et intégrales à paramètres

A - Convergence dominée et intégration terme à terme

1. Convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$

2. Théorème de convergence dominée

a. Théorème (de convergence dominée) : H. Lebesgue

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I.

On suppose que :

- la suite de fonctions $\left(f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
- •• Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \left| f_n \right| \le \varphi .$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, la suite $\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t} .$$

b. Théorème (de convergence dominée, version continue) :

Soient A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. Soit a un point de A ou une borne de a.

On suppose que :

- • Pour tout $x \in A$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I.
- •• Pour tout $t \in I$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ admet une limite finie $\ell(t)$ lorsque x tend vers a.
- ••• La fonction $t \mapsto \ell(t)$ est continue sur I.
- •••• Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que :

$$\text{Pour tout } (x, t) \in A \times I,\ \left| f(x, t) \right| \le \varphi(t).$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, la suite $\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t} .$$

2. Intégration terme à terme

Théorème (d'intégration terme à terme dans une intégrale généralisée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\sum_{n \ge 0} f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I.

On suppose que :

- • la série de fonctions $\sum_{n \ge 0} f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
- •• La série $\sum_{n \ge 0} \int_I \left| f_n(t) \right| \mathrm{d}t$ converge.

Alors, la fonction f est intégrable sur I, la série $\sum_{n \ge 0} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et

$$\boxed{\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t} .$$

3. Théorème de convergence dominée, version séries de fonctions

Le « bon » théorème à utiliser pour intervertir séries et intégrales généralisées est, a priori, le théorème d'intégration terme à terme : cf. paragraphe ci-dessus. C'est donc ce théorème que l'on privilégiera dans toute situation « habituelles ». Cependant, il arrive, en certaines occasions, que ce théorème ne permette pas de conclure ; on pourra alors tenter d'utiliser le théorème de convergence dominée, à titre de « version de secours ». Ce sera en particulier souvent le cas si l'on rencontre une série de fonctions alternée $\sum (-1)^n f_n$, telle que $\sum (-1)^n f_n$ converge simplement, mais $\sum f_n$ diverge.

Théorème (de convergence dominée again)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I.

On suppose que :

- • la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
- • • Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^{n} f_k \right| \leq \varphi.$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Exemples

Justifier les interversions séries/intégrales suivantes, en utilisant le théorème qui vous semble le plus adapté :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

B - Régularité d'une intégrale à paramètres

1. Continuité sous le signe $\int$

Théorème (de continuité sous le signe somme)

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : \begin{pmatrix} I \times J \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{pmatrix}$. On suppose que :

- • pour tout $t_0 \in J$, la fonction $f(\bullet, t_0) : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x, t_0) \end{pmatrix}$ est continue sur I.
- • • Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $f(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto f(x_0, t) \end{pmatrix}$ est continue par morceaux sur J.
- • • • Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on a $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors la fonction $g : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int\limits_J f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$ est définie et continue sur I.

Théorème (de continuité sous le signe somme) : version domination locale

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : \begin{pmatrix} I \times J \to \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{pmatrix}$. On suppose que :

- pour tout $t_0 \in J$, la fonction $f(\bullet, t_0) : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x, t_0) \end{pmatrix}$ est continue sur I.
- •• Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $f(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto f(x_0, t) \end{pmatrix}$ est continue par morceaux sur J.
- ••• Pour tout segment K inclus dans I, il existe une fonction φ_K continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, et telle que : pour tout $(x, t) \in K \times J$, on a $|f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$.

Alors, la fonction $g : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_J f(x, t)\, \mathrm{d}t \end{pmatrix}$ est continue sur I.

2. Dérivation sous le signe somme

a. Théorème de dérivation sous le signe $\int$: formule de Leibniz

Le théorème

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : \begin{pmatrix} I \times J \to \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{pmatrix}$. On suppose que :

- pour tout $t_0 \in J$, la fonction $f(\bullet, t_0) : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x, t_0) \end{pmatrix}$ est de classe C^1 sur I.
- •• Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $f(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto f(x_0, t) \end{pmatrix}$ est intégrable sur J.
- ••• Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \end{pmatrix}$ est continue par morceaux sur J.
- •••• Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, et telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \varphi(t)$.

Alors, la fonction $g : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_J f(x, t)\, \mathrm{d}t \end{pmatrix}$ est de classe C^1 sur I, et pour tout $x \in I$, $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, \mathrm{d}t$.

b. Deux généralisations

Théorème de dérivation sous le signe $\int$: version domination locale

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : \begin{pmatrix} I \times J \to \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{pmatrix}$. On suppose que :

- pour tout $t_0 \in J$, la fonction $f(\bullet, t_0) : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x, t_0) \end{pmatrix}$ est de classe C^1 sur I.

•• Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $f(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto f(x_0, t) \end{pmatrix}$ est intégrable sur J.

••• Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \end{pmatrix}$ est continue par morceaux sur J.

•••• Pour tout segment K inclus dans I, il existe une fonction φ_K continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, et telle que pour tout $(x, t) \in K \times J$, on a $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_K(t)$.

Alors, la fonction $g : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_J f(x, t)\, \mathrm{d}t \end{pmatrix}$ est de classe C^1 sur I, et pour tout $x \in I$, $g'(x) = \int_J \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, \mathrm{d}t$.

Théorème de dérivation sous le signe $\int$: version C^p

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \begin{pmatrix} I \times J \to \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{pmatrix}$. On suppose que :

- pour tout $t_0 \in J$, la fonction $f(\bullet, t_0) : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x, t_0) \end{pmatrix}$ est de classe C^p sur I.

•• Pour tout $x_0 \in I$, pour tout k tel que $0 \leq k < p$, la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0, t) \end{pmatrix}$ est continue par morceaux et intégrable sur J.

••• Pour tout $x_0 \in I$, la fonction $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x_0, \bullet) : \begin{pmatrix} J \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x_0, t) \end{pmatrix}$ est continue par morceaux sur J.

•••• Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, et telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on a $\left| \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors, la fonction $g : \begin{pmatrix} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_J f(x, t)\, \mathrm{d}t \end{pmatrix}$ est de classe C^p sur I, et :

pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq p$, pour tout $x \in I$, $g^{(k)}(x) = \int_J \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\, \mathrm{d}t$.