Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

DS N°1

Corrigé

Exercice

1.a. Comme $|q| < 1$, le cours assure que les séries géométrique et géométrique dérivées $\sum a_n$ et $\sum n a_n$ convergent, et que l'on a $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{q}{1-q}}$, $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = \frac{q}{(1-q)^2}}$.

b. On a $b_n = \left(\prod_{k=1}^{n} q^k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{n+1}{2}}$, et

$$c_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} q^{-k}} = \frac{n}{\frac{1}{q}\frac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}}} = n q^n \frac{1-q}{1-q^n}.$$

Alors, la série géométrique $\sum b_n$ converge, et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{q}{1-\sqrt{q}}}$.

On a $c_n \sim n q^n (1-q)$ et la convergence de $\sum n q^n$ est absolue, donc $\sum c_n$ converge absolument.

2. Il s'agit ici de prouver les ***inégalités de convexité***.

2.a. Soit $(a, b) \in [0,1]^2$; considérons la fonction g définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1],\ g(t) = t.f(a) + (1-t).f(b) - f\big(t.a + (1-t).b\big).$$

La fonction f étant deux fois dérivable, g l'est aussi, et l'on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$g'(t) = f(a) - f(b) - (a-b) f'\big(t.a + (1-t).b\big),$$

puis : $$g''(t) = -(a-b)^2 f''\big(t.a + (1-t).b\big).$$

La positivité de f'' assure que g'' est à valeurs négatives ou nulles, g' est donc décroissante.

D'autre part, on a $g(0) = g(1) = 0$; la fonction g étant continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, on en conclut grâce au théorème de Rolle qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Par décroissance de g', on en déduit que g' est positive sur $[0, c]$, négative sur $[c, 1]$.

La fonction g est donc croissante sur $[0, c]$, et comme $g(0) = 0$, il s'ensuit que pour tout $t \in [0, c]$, $g(t) \geq 0$. de même, g est décroissante sur $[c, 1]$ et $g(1) = 0$, donc pour tout $t \in [c, 1]$, $g(t) \geq 0$. Ainsi, g est à valeurs positives sur $[0, 1]$:

$$\boxed{\forall\, t \in [0,1],\ t.f(a) + (1-t).f(b) \geq f\left(t.a + (1-t).b\right)}\ .$$

2.b. On raisonne par récurrence sur n, l'hypothèse de récurrence étant bien sûr, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{H}(n) : \left(\begin{array}{c} \forall\, (\alpha_k)_{k \in 1,n} \in I^n,\ \forall\, (t_k)_{k \in 1,n} \in (\mathbb{R}^+)^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \\ \sum_{k=1}^{n} t_k . f(\alpha_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k . \alpha_k \right) \end{array} \right).$$

Initialisation

Prouver $\mathcal{H}(1)$ se résume à constater que, pour tout $\alpha \in I$, $f(\alpha) \geq f(\alpha)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $\mathcal{H}(n)$.

Considérons alors $(\alpha_k)_{k \in 1,n+1} \in I^{n+1}$, et $(t_k)_{k \in 1,n+1} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1$.

On a

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k . \alpha_k \right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k . \alpha_k + t_{n+1} . \alpha_{n+1} \right) \\ &= f\left(\left(\sum_{j=1}^{n} t_j \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . \alpha_k + t_{n+1} . \alpha_{n+1} \right) \\ &= f\left((1 - t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . \alpha_k + t_{n+1} . \alpha_{n+1} \right) \text{ car } \sum_{j=1}^{n+1} t_j = 1. \end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . \alpha_k$ appartient à l'intervalle I, car c'est le barycentre des points $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de I,

affecté des coefficients positifs $\displaystyle\frac{t_1}{\sum_{j=1}^{n} t_j}, \ldots, \frac{t_n}{\sum_{j=1}^{n} t_j}$. On peut donc appliquer le résultat de **1.a.** , et

l'on obtient :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k . \alpha_k\right) \leq \left(1 - t_{n+1}\right) . f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . \alpha_k\right) + t_{n+1} . f\left(\alpha_{n+1}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} t_j\right) . f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . \alpha_k\right) + t_{n+1} . f\left(\alpha_{n+1}\right) .$$

Maintenant, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des points de I, $\displaystyle\frac{t_1}{\sum_{j=1}^{n} t_j}, \ldots, \frac{t_n}{\sum_{j=1}^{n} t_j}$ des réels positifs tels

que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t_1}{\sum_{j=1}^{n} t_j} = 1$. On peut donc utiliser $\mathcal{H}\left(n\right)$, et en conclure que :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . \alpha_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . f\left(\alpha_k\right) .$$

On en déduit que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k . \alpha_k\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} t_j\right) . \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\sum_{j=1}^{n} t_j} . f\left(\alpha_k\right)\right) + t_{n+1} . f\left(\alpha_{n+1}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} t_k . f\left(\alpha_k\right)\right) + t_{n+1} . f\left(\alpha_{n+1}\right),$$

d'où $\mathcal{H}\left(n+1\right)$.

Le principe du raisonnement par récurrence assure alors que $\boxed{\mathcal{H}\left(n\right) \text{ est vérifiée pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Soit donc $\left(\alpha_k\right)_{k \in \{1,n\}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. On a :

$$\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\alpha_k\right).$$

La convexité sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'application $x \mapsto -\ln x$ est incontestable : sa dérivée seconde, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, ayant une certaine tendance à rester positive… et cela assure, d'après **1.b.**, que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\alpha_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\alpha_k\right) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \alpha_k\right) = \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right).$$

Par suite, $\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$.

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit finalement que :

$$\boxed{\left(\alpha_k\right)_{k \in \{1,n\}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

4.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par croissance de la fonction $\ln$:

$$\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \ln k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt \text{ , soit :}$$

$$\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \geq \frac{1}{n} \int_{1}^{n} \ln t \, dt = \frac{1}{n} \left[t \ln t - t\right]_1^n = \frac{1}{n} \left(n \ln n - n + 1\right).$$

We won : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \geq \ln n - 1 + \frac{1}{n}}$.

4.b. La méthode du cours consiste à étudier $\varphi : x \mapsto \ln\left(1 + x\right) - x$ (on pourrait aussi raisonner par convexité…). C'est sans difficulté, on obtient bien en fin de compte :

$$\boxed{\forall\, u \in \mathbb{N}_+^*, \ \ln\left(1 + u\right) \leq u}.$$

4.c. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(n+1\right) - \ln n$, d'où :

$$\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \geq \ln n - 1 + \frac{1}{n} \geq \ln n - 1 + \ln\left(n+1\right) - \ln n \text{ , soit :}$$

$\ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \geq \ln(n+1) - 1$. La croissance de la fonction exponentielle donne alors :

$\sqrt[n]{n!} \geq \dfrac{n+1}{\mathrm{e}}$, et finalement : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}}$.

5.a. ***Eine grosse astuce !*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit subtilement :

$$b_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} k\, a_k\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} k\, a_k\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

On applique alors naturellement la question précédente, et il vient :

$$b_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1} \left(\prod_{k=1}^{n} k\, a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

On applique alors encore plus naturellement la question **2.** avec $\alpha_k = k\, a_k$.

On en déduit brillamment que : $b_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, a_k$;

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ b_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k}.$$

5.b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n$. D'après **a.**, on a :

$$\begin{aligned}
S_p = \sum_{n=1}^{p} b_n &\leq \sum_{n=1}^{p} \frac{\mathrm{e}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k \\
&\leq \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}}{n(n+1)}\, k\, a_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=k}^{p} \frac{\mathrm{e}}{n(n+1)}\, k\, a_k \qquad \text{(interversion de sommes)} \\
&= \mathrm{e} \sum_{k=1}^{p} k\, a_k \sum_{n=k}^{p} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \mathrm{e} \sum_{k=1}^{p} k\, a_k \sum_{n=k}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \mathrm{e} \sum_{k=1}^{p} k\, a_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{p+1}\right) \qquad \text{(télescopage)}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad e \sum_{k=1}^{p} k\, a_k \,.\, \frac{1}{k}$$

$$= \quad e \sum_{k=1}^{p} a_k$$

$$\leq \quad e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad .$$

On a donc bien prouvé que : $\boxed{\forall \; p \in \mathbb{N}^* \; , \; S_p \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k}$.

5.c. La suite $\left(S_p \right)_{p \geq 1} = \left(\sum_{n=1}^{p} b_n \right)_{p \geq 1}$ des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ est donc majorée. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, le théorème fondamental pour ce type de séries assure alors la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$.

On peut aussi dire que le fait que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ soit à termes positifs entraîne la croissance de la suite $\left(S_p \right)_{p \geq 1} = \left(\sum_{n=1}^{p} b_n \right)_{p \geq 1}$ des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$. Le théorème de limite monotone assure alors la convergence de ladite suite, ce qui signifie, par définition, la convergence de ladite série. Toujours est – il que, quel que soit l'argument invoqué :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge}} \quad .$$

On a vu à la question précédente que : $\forall \; p \in \mathbb{N}^* \; , \; \sum_{n=1}^{p} b_n \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Maintenant qu'on sait que tutti il mundi converge, on peut passer à la limite lorsque p tend vers $+\infty$, et il vient finalement que : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$.

6. On applique à nouveau la comparaison des moyennes… Il s'agit en fait ici de comparer les ***moyennes harmonique et géométrique*** . On a vu à la deuxième question que :

$$\forall \; \left(\alpha_k \right)_{k \in 1,n} \in \left(\mathbb{N}_+^* \right)^n \; , \; \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \quad .$$

Si on a l'idée d'appliquer cette inégalité aux inverses $\left(\dfrac{1}{\alpha_k}\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$, on obtient :

$$\forall\,(\alpha_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in (\mathbb{R}_+^*)^n\,,\quad \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k}\,,\ \text{soit encore :}$$

$$\boxed{\forall\,(\alpha_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in (\mathbb{N}_+^*)^n\,,\quad \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{\frac{1}{n}}}\ .$$

En appliquant ceci aux $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on obtient bien que : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ c_n \leq b_n}$.

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs assure alors la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} c_n$, et le fait que : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$.

Problème

Préliminaires

1.a. C'est du cours : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est continue, à valeurs positives, décroissante sur $[2, +\infty[$; la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$ sont donc de même nature. Or l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$ diverge, car

$$\lim_{X \to +\infty} \int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \lim_{X \to +\infty} \left[\ln(\ln t)\right]_2^X = \lim_{X \to +\infty} \ln\left(\frac{\ln X}{\ln 2}\right) = +\infty\,.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln n}$ est divergente.

1.b. Enoncé :

Soit $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

i – La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

ii – $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Alors, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Je ne refais pas la démonstration, qui est dans le cours.

Si $\sum (-1)^n u_n$ est une série alternée (donc $a_n = (-1)^n u_n$), on a pour tout $n \geq 1$,

$b_n = (-1)^n \left(u_n - u_{n-1}\right)$, $d_n = (-1)^n\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right)$.

Pour des exemples de suites vérifiant le TSSA et qui sont à variation bornée, quasi convexe ou convexe, on peut bien sûr prendre la suite nulle. J'écarte cet exemple trivial, ainsi que les suites nulles à partir d'un certain rang. Pour des exemples plus consistants :

Si l'on prend $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, la suite (u_n) est bien décroissante, positive et de limite nulle. On a alors

$b_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$, $|b_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann, $\sum b_n$ est absolument convergente : une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées peut être à variation bornée.

De plus, $d_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^{n+1}2}{n(n+1)(n+2)}$, $|n\, d_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum d_n$ est absolument convergente : une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées peut être quasi convexe.

Trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les hypothèses du TSSA et qui est convexe est plus difficile. Prendre

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{1}{2^{n+2}} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

, et vérifier que ça marche…

2. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à variation bornée, alors la série $\sum b_n$ est absolument convergente, elle est donc convergente : $\sum (a_{n-1} - a_n)$ converge. D'après un résultat du cours (qui se redémontre à l'aide d'un télescopage sans difficulté), cela revient à dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \left(a_{n-1} - a_n\right) - \left(a_n - a_{n+1}\right) = b_n - b_{n+1}$. On a donc pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} n\, d_n = \sum_{n=1}^{N} n\left(b_n - b_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n\, b_n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)\, b_n \qquad \text{séparation des sommes, et changement d'indice}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n\, b_n - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)\, b_n = \sum_{n=1}^{N} n\, b_n - \sum_{n=1}^{N} (n-1)\, b_n - N\, b_{N+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \big(n-(n-1)\big)\, b_n - N\, b_{N+1}\ ,$$

d'où l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\, d_n = \sum_{n=1}^{N} b_n - N\, b_{N+1}$.

Partie I

4. On a $d_n = b_n - b_{n+1}$, donc d_n est positif pour tout $n \geq 1$ si et seulement si la suite $\left(b_n\right)$ est décroissante : autrement dit, la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si la suite $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

5. On a ici pour tout $n \geq 1$:

$d(n) = f(n-1) + f(n+1) - 2f(n) = \big(f(n+1) - f(n)\big) - \big(f(n) - f(n-1)\big)$.

On utilise le théorème des accroissements finis : la fonction f est continue sur $[n, n+1]$, de classe C^1 sur $]n, n+1[$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $y_n \in\,]n, n+1[$ tel que $f(n+1) - f(n) = \big((n+1)-n\big) f'\left(y_n\right)$, ie $f(n+1) - f(n) = f'\left(y_n\right)$. De la même façon, il existe $x_n \in\,]n-1, n[$ tel que $f(n) - f(n-1) = f'\left(x_n\right)$. On a alors $d(n) = f'\left(y_n\right) - f'\left(x_n\right)$; comme f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$, f' y est croissante. Et, comme $y_n > n > x_n$, on en déduit que $d(n)$ est positif ou nul : la suite $\left(a_n\right)$ est convexe.

6. Dire que $\left(a_n\right)$ et $\left(a'_n\right)$ sont toutes deux convexes, c'est dire que les suites $\left(b_n\right)$ et $\left(-b_n\right)$ sont toutes deux décroissantes, ce qui revient encore à dire que $\left(b_n\right)$ est constante. Mais, par définition, la suite $\left(b_n\right) = \left(a_{n-1} - a_n\right)$ est constante si et seulement si $\left(a_n\right)$ est une suite arithmétique. Ainsi, les suites $\left(a_n\right)$ convexes telles que la suite $\left(a'_n\right)$ définie par la relation $a'_n = -a_n$ soit également convexe sont les suites arithmétiques.

7. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après **Q5** :

- Si $\alpha \geq 1$, comme f est convexe, la suite $\left(a_n\right) = \left(n^\alpha\right)$ est convexe.
- Si $\alpha < 1$, alors f est strictement concave donc $d_n < 0$ pour tout n.

Conclusion : la suite $\left(n^{\alpha}\right)$ est convexe si et seulement si $\alpha \geq 1$.

8. **a.** On trouve que pour $\alpha = \frac{3}{2}$, la liste $[d_1, d_2, \ldots, d_{10}]$ est la liste $[0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 1, -1, 1]$. $d_9 < 0$, donc la suite $(a_n) = \left(\lfloor n^{\alpha} \rfloor\right)$ n'est pas convexe pour $\alpha = \frac{3}{2}$.

b. • On a $f(1) = 2^{\alpha} - 4 \geq 0$, car $\alpha \geq 2$. De plus, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout x appartenant à cet intervalle, $f'(x) = \alpha\left[(x+1)^{\alpha-1} + (x-1)^{\alpha-1} - 2x^{\alpha-1}\right]$ qui est positif car la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est convexe. Donc f est croissante et $f(1) \geq 0$, f est à valeurs positives sur $[1, +\infty[$.

• On a

$$(n+1)^{\alpha} - 1 < \lfloor (n+1)^{\alpha} \rfloor$$
$$(n-1)^{\alpha} - 1 < \lfloor (n-1)^{\alpha} \rfloor$$
$$-2n^{\alpha} - 1 \leq -2\lfloor n^{\alpha} \rfloor$$

En additionnant ces inégalités, on trouve $d_n \geq (n+1)^{\alpha} + (n-1)^{\alpha} - 2n^{\alpha} - 2 = f(n) \geq 0$, donc si $\alpha \geq 2$ alors la suite $(a_n) = \left(\lfloor n^{\alpha} \rfloor\right)$ est convexe.

Partie II

9.

$(b_n) \searrow$ et $b_n \geqslant -2A$ donc (b_n) converge. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l \neq 0$ alors (a_n) n'est pas bornée (en supposant $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b > 0$—par exemple—alors $\exists n_0 \mid \forall n \geqslant n_0,\ b_n \geqslant \frac{1}{2}b$ d'où $a_n \leqslant a_{n-1} - \frac{1}{2}b \leqslant a_{n_0} - \frac{n-n_0}{2}b \to -\infty$).

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \text{ et, comme } (b_n) \searrow 0 \text{ alors } b_n \geqslant 0}$.

10.

On a $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n = a_0 - a_N$ et comme (a_n) est bornée, que $b_n \geqslant 0$, on en déduit que la série $\sum b_n$ converge et donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est convergente}}$.

11.

On écrit

$$
\begin{aligned}
a_p - a_n = \sum_{k=p+1}^{n} b_k &\geqslant (n-p)b_n \quad \text{car } (b_n) \searrow \\
&\geqslant \frac{n}{2} b_n \quad \text{car } -p \geqslant -\frac{n}{2} \text{ et } b_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

donc $\boxed{0 \leqslant nb_n \leqslant 2(a_p - a_n)}$

On prend $p = [n/2]$ d'où $0 \leqslant nb_n \leqslant 2(a_{[n/2]} - a_n) \to 0$.

Ensuite, comme $0 \leqslant nb_{n+1} \leqslant (n+1)b_{n+1}$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} nb_{n+1} = 0}$.

12. On utilise l'égalité de **Q3** et comme $\lim_{N \to +\infty} N b_{N+1} = 0$, on a $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n d_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}$

par passage à la limite.

Partie III

13.

Question difficile, en fait, on veut prouver que

$$
\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \right| + 2 \sum_{n=1}^{N-1} n |b_n - b_{n+1}|.
$$

et pour cela, on utilise les inégalités

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N-1} n|d_n| &= \sum_{n=1}^{N-1} n|b_n - b_{n-1}| \\
&\geqslant \sum_{n=0}^{N-1} n(|b_n| - |b_{n+1}| \geqslant \sum_{n=1}^{N} |b_n| - N|b_N|
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N-1} n|d_n| \geqslant \left| \sum_{n=1}^{N-1} n(b_n - b_{n+1}) \right| &\geqslant \left| \sum_{n=0}^{N-1} b_n - Nb_N \right| \\
&\geqslant -\left| \sum_{n=1}^{N} b_n \right| + N|b_N|
\end{aligned}
$$

et on fait la somme d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leqslant |a_0 - a_N| + 2\sum_{n=1}^{N-1} n|d_n|}$.

On a donc l'inégalité demandée, on en déduit que $\sum_{n=1}^{N} |b_n|$ est majorée donc la série $\sum b_n$ est absolument convergente, $\boxed{(a_n) \text{ est à variation bornée}}$ (donc convergente)

14.

La première inégalité est évidente car la série $\sum b_n$ est convergente. La deuxième est tout aussi évidente car $a_0 - a_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on peut conclure.

15.

En utilisant l'égalité **O.2**, on a

$$Nb_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} b_n - \sum_{n=1}^{N-1} nd_n$$

donc Nb_{N+1} a une limite car $\sum b_n$ et $\sum nd_n$ convergent. Cette limite ne peut être que 0 (sinon $\sum b_n$ divergerait) d'où, quand $N \to +\infty$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}.$$

Partie IV

16.

On sait (question **O.2**) que $\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1}) = \sum_{m=1}^{n} a_m - na_{n+1}$ (en remplaçant b par a et N par n). Or

$$n(n+1)(c_n - c_{n+1}) = (n+1)\sum_{m=1}^{n} a_m - n\sum_{m=1}^{n+1} a_m = \sum_{m=1}^{n} a_m - na_{n+1}$$

d'où

$$\boxed{c_n - c_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m(a_m - a_{m+1})}$$

en divisant par $n(n+1)$ et en remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|c_n-c_{n+1}| &\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{n} m|a_m-a_{m+1}| \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{N} m|a_m-a_{m+1}|\underbrace{\sum_{n=m}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{=\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}\leqslant\frac{1}{m}} \qquad \text{en permutant les sommes} \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{N}|a_m-a_{m+1}|.\end{aligned}$$

17.

On écrit

$$\begin{aligned} n(n+1)(c_{n+1}-c_n) &= -\sum_{m=1}^{n} m(a_m-a_{m+1}) = -n(a_n-a_{n+1})-\sum_{m=1}^{n-1} m(a_m-a_{m+1}) \\ &= -n(a_n-a_{n+1})+n(n-1)(c_n-c_{n-1})\end{aligned}$$

d'où, en écrivant que $c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n=-(c_n-c_{n-1})+(c_{n+1}-c_n)$,

$$\boxed{c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n=\frac{1}{n+1}[(a_{n+1}-a_n)+2(c_{n-1}-c_n)]}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} n|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n| &\leqslant \sum_{n=2}^{N}\frac{n}{n+1}(|a_{n+1}-a_n|+2|c_{n-1}-c_n|) \\ &\leq \sum_{n=2}^{N}|a_{n+1}-a_n|+\sum_{n=2}^{N-1}|a_{n+1}-a_n| \quad \text{(relation de } \textbf{Q16}\text{)} \\ &\leqslant 3\sum_{n=1}^{N}|a_{n+1}-a_n|\end{aligned}$$

donc, la série $\sum n|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n|$ converge, (c_n) est quasi-convexe et, par passage à la limite, on a

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n|c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n|\leqslant 3\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|}.$$

18.

Comme (a_n) est bornée, (c_n) est bornée, or, au **III**, on a vu qu'une suite quasi-convexe et bornée était à variation bornée donc (c_n) est à variation bornée. On utilise ensuite la relation de **Q17**

$$(n+1)[c_{n-1}+c_{n+1}-2c_n]+2(c_n-c_{n-1})=a_{n+1}-a_n$$

d'où $|a_{n+1}-a_n| \leqslant (n+1)|\Delta^2 c_n| + 2|\Delta c_n|$, par conséquent $\boxed{(a_n) \text{ est à variation bornée et convergente}}$.

19. On a $b_n \geq 0$, $\sum b_n$ peut être considérée comme la somme de deux séries $\sum_{n \neq 2^p} \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{2^p}$ qui convergent. (a_n) est donc à variation bornée. D'après **Q17**, (c_n) est quasi-convexe. On utilise à nouveau l'égalité de **Q3**, or, comme $N b_{n+1}$ n'a pas de limite, $\sum n d_n$ diverge, $\boxed{\text{on ne peut donc pas avoir l'égalité proposée}}$.

20.

On a $(n+1)c_{n+1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{=nc_n=(n+1)c_n-c_n} + a_{n+1}$ d'où, en divisant par $n+1$, on obtient

$\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = c_{n+1} - c_n + \dfrac{c_n}{n+1}}$ et $\boxed{\dfrac{c_n}{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{n+1} + c_n - c_{n+1}}$.

Comme (a_n) est à variation bornée, la série $\sum c_{n+1} - c_n$ est absolument convergente.

- Si $\sum \dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente alors l'inégalité $\left|\dfrac{a_{n+1}}{n+1}\right| \leqslant |c_{n+1}-c_n| + \left|\dfrac{c_n}{n+1}\right|$ permet d'affirmer, par domination, que $\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente.
- Si $\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ est absolument convergente alors l'inégalité $\left|\dfrac{c_n}{n+1}\right| \leqslant \left|\dfrac{a_{n+1}}{n+1}\right| + |c_n - c_{n+1}|$ prouve de même que la série $\sum \dfrac{c_n}{n+1}$ est absolument convergente.

Conclusion : on a bien l'équivalence $\boxed{\sum \dfrac{a_{n+1}}{n+1} \text{ A.C.} \Leftrightarrow \sum \dfrac{c_n}{n+1} \text{ A.C.}}$

Partie V

21.

Pour la première relation, on procède par récurrence, $1 \leqslant 1 + \ln 1$ puis, à l'aide de l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ on a

$$\frac{1}{p+1} \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = \ln\frac{p+1}{p}$$

ce qui permet de passer de la propriété à l'ordre p à l'ordre $p+1$ donc

$$\boxed{\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \leqslant 1 + \ln p}.$$

Remarque : on peut aussi utiliser la comparaison série-intégrale...
Ensuite, grâce à $\Big||a| - |b|\Big| \leqslant |a-b|$ on a

$$\Big| |a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)| - |a_p - a_{p+1}|\ln p \Big| \leqslant |a_{p+1}| \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p}.$$

22.

- Supposons que les séries $\sum \frac{a_n}{n}$ et $\sum (a_n \ln n - a_{n+1}\ln(n+1))$ sont absolument convergentes alors, en utilisant la deuxième inégalité ci-dessus, on a

$$|a_p - a_{p+1}|\ln p \leqslant \frac{|a_{p+1}|}{p} + |a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)|$$

donc $\sum (a_p - a_{p+1})\ln p$ est absolument convergente.
Puis, la convergence de $\sum (a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1))$ entraîne la convergence de la suite $(a_n \ln n)$. Si cette limite l est non nulle alors $\sum \frac{a_p}{p}$ diverge ($a_n \sim \frac{l}{n\ln n}$), ce qui est impossible.

Conclusion : $\boxed{\sum (a_p - a_{p+1})\ln p \text{ est absolument convergente et } a_n \ln n \to 0}$.

- La suite $(a_n \ln n)$ converge vers 0 et la série $\sum (a_{n+1} - a_{n+2})\ln(n+1)$ est absolument convergente. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n} &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left(\sum_{p=n}^{N-1} |a_p - a_{p+1}| + |a_N|\right) \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{N-1} |a_p - a_{p+1}| \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + |a_n| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{N-1} |a_p - a_{p+1}|(1 + \ln p) + |a_N|(1 + \ln N)
\end{aligned}$$

ce qui permet de dire que $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge, il en est de même de $\sum \frac{|a_{n+1}|}{n}$. On utilise alors la deuxième relation du V qui donne

$$|a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1)| \leqslant |a_p - a_{p+1}|\ln p + \frac{|a_{p+1}|}{p}$$

et on peut conclure que $\boxed{\sum a_p \ln p - a_{p+1}\ln(p+1) \text{ converge}}$.

Remarque : on peut aussi utiliser l'inégalité $\dfrac{1}{n} \leqslant -\ln(1-\frac{1}{n}) = \ln n - \ln(n-1)$ d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{|a_n|}{n} &\leqslant \sum_{n=2}^{N} |a_n| \ln n - \sum_{n=1}^{N-1} |a_{n+1}| \ln n \\
&\leqslant |a_N| \ln N + \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{(|a_n| - |a_{n+1}|)}_{\leqslant |a_n - a_{n+1}|} \ln n \\
&\leqslant \underbrace{|a_N| \ln N}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} |a_n - a_{n+1}| \ln n}_{\text{converge}}
\end{aligned}$$

donc $\sum \dfrac{a_n}{n}$ est absolument convergente.

23.

$a_n = 0\ldots$, $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n}}$.