



DS N°2

Corrigé de la version soft

Problème 1 CCINP MP 2008

Partie I

Q5. `def factorielle(n) :`

```
fact = 1
for i in range(2, n + 1):
    fact *= i
return fact
```

ou bien, récursivement,

```
def factorielle(n) :
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorielle(n - 1)
```

Q6. $\binom{30}{10} = \frac{30!}{10!20!}$ ce qui représente $30 + 10 + 20 + 1 = 61$ multiplications (ce que semble attendre le sujet vu ce qui suit même si ma première version de `factorielle(n)` n'effectue que $n - 1$ multiplications pour $n \geq 2$).

En remarquant que $\binom{30}{10} = \frac{30 \times 29 \times \dots \times 21}{10!}$, (on ramène le nombre de multiplications à 20) (ou, plus exactement, à 17).

Enfin, si on remplace `/` par `//`, (on obtient un résultat de type `float`).

Q7. Soit $n \geq p \geq 1$.

1^{re} méthode $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}$ donc $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.

2^e méthode On dénombre les couples (k, A) où A partie à p éléments de E de cardinal n et $k \in A$ de deux manières différentes :

- soit on choisit d'abord k dans E puis $A \setminus \{k\}$ partie à $p - 1$ éléments de $E \setminus \{k\}$ ce qui donne $n \binom{n-1}{p-1}$ couples possibles,
- soit on choisit d'abord A puis k élément de A ce qui donne $\binom{n}{p} p$ couples possibles.

Et donc, finalement, $n \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p} p$.

```
def binom_rec(n, p):
    if not (0 <= p <= n):
        return 0
    if p in (0, n):
        return 1
    return n * binom_rec(n - 1, p - 1) // p    # Attention à la position du // p !!!
```

Ce n'est pas demandé dans le sujet, mais on peut optimiser le calcul en remarquant que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

```
def binom_rec(n, p):
    if not (0 <= p <= n):
        return 0
    if p in (0, n):
        return 1
    if n - p < p:
        return binom_rec(n, n - p)
    return n * binom_rec(n - 1, p - 1) // p
```

Q8.

```
def bernoulli(n):
    b = [1] # b[k] vaut b_k
    for p in range(1, n + 1):
        b.append(-sum(binomial(p + 1, k) * b[k] for k in range(p)) / (p + 1))
        # On calcule b_p et on l'ajoute à sa place, au bout de b.
    return b[-1]
```

Si l'on ne souhaite pas utiliser `sum` :

```
def bernoulli(n):
    b = [1] # b[k] vaut b_k
    for p in range(1, n + 1):
        bp = 0
        for k in range(p):
            bp += binomial(p + 1, k) * b[k]
        b.append(-bp / (p + 1))
    return b[-1]
```

Partie II

Q9. Soit $a > 1$ et $\gamma \in]1, a[$. Comme $0 \leq \frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ car, par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n^{a-\gamma}} \rightarrow 0$, et comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ converge, par comparaison de séries à termes généraux positifs,

$$\sum \frac{\ln n}{n^a} \text{ converge.}$$

Q10. H1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto e^{-x \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, et $f'_n : x \mapsto -\frac{\ln n}{n^x}$.

H2. $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ comme série de Riemann convergente.

H3. Soit $a > 1$. Pour tout $x \geq a$, $|f'_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}$ qui est un terme général de série convergente d'après la question précédente, indépendant de x .

Donc $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Ainsi, par théorème de transfert de classe $\mathcal{C}^1$, $\left[\zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1, +\infty[\right]$ et $\zeta' : x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \leq 0$ donc

ζ décroît.

Q11. Si $\sum f_n$ convergerait uniformément sur $]1, +\infty[$, le théorème de la double limite s'appliquerait au voisinage de 1 et en particulier $\sum \lim_{1^+} f_n = \sum \frac{1}{n}$ convergerait ce qui est contradictoire.

$$\left(\sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1, +\infty[. \right)$$

Q12. Par contre $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[2, +\infty[$ car si $x \geq 2$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$ terme général de série convergente indépendant de x .

Le théorème de la double limite peut donc s'appliquer, avec $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \delta_{n,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc

$$\left(\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{n,1} = 1. \right)$$

Q13. Soit $x > 1$. $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, ce qui permet de faire une comparaison série intégrale. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ l'intégrale de Riemann $I(x)$ étant bien convergente avec $x > 1$, $\left(I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1. \right)$

Or $I(x) = \left[\frac{1}{(-x+1)t^{x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$, donc $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$ et $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq 1 + (x-1)$ donc

$$(x-1)\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 \text{ par encadrement et enfin } \left(\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}. \right)$$

Q14. Il y a une imprécision dans l'énoncé : d_n désigne manifestement le nombre de diviseurs **positifs** de n .

$\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b) \in A} = \left(\frac{1}{a^x} \times \frac{1}{b^x}\right)_{(a,b) \in A}$ est une « suite double produit » sommable car les séries $\sum_{a \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^x}$ et $\sum_{b \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{b^x}$ sont absolument convergentes (les termes sont positifs) de somme le produit des sommes, c'est-à-dire

de somme $\zeta(x)^2$. En effet, les termes sont positifs, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{b \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(ab)^x}$ converge vers $\frac{\zeta(b)}{a^x}$ et $\sum_{a \in \mathbb{N}^*} \frac{\zeta(b)}{a^x}$

converge vers $\zeta(x)^2$.

On pose $A_n = \{(a, b) \in A, ab = n\}$, et alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$ et les A_n sont deux à deux disjoints.

Donc, par sommabilité et théorème de sommation par paquet, on peut écrire, la série étant convergente

$$\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{n^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|A_n|}{n^x}.$$

Or $|A_n| = |\{(a, b) \in \mathbb{N}_*^2, n = ab\}| = \left| \left\{ \left(a, \frac{n}{a} \right) \text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n \right\} \right| = d_n$.

Finalement, $\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$.

Problème 2 Epita 2019

Dans toute la résolution de ce problème, α est un réel strictement positif, sauf le temps de la question 7.(a). De plus, nous posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, \quad f_n(x) = e^{-xn^\alpha}.$$

PARTIE I : premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-xn} = (e^{-x})^n$. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-xn}$ est une série géométrique, de raison e^{-x} ; elle converge donc si et seulement si $e^{-x} \in]-1, 1[$, si et seulement si $x > 0$.

Ainsi la série de fonctions définissant S_1 converge simplement sur $]0, +\infty[$. Toujours en y reconnaissant une somme de série géométrique, on peut expliciter $S_1(x)$ pour tout $x > 0$:

$$\forall x > 0, \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

- (b) On utilise l'équivalent classique : $e^{-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$. On en déduit :

$$S_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S_1(x) = +\infty.$$

2. (a) Soit $x \leq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-xn^\alpha \geq 0$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-xn^\alpha} \geq e^0 = 1$. Ainsi $(e^{-xn^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{-xn^\alpha}$ diverge grossièrement.

(b) Soit $x > 0$. D'après le théorème des croissances comparées, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-xn^\alpha} = 0$. On

en déduit : $e^{-xn^\alpha} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Les séries $\sum_{n \geq 1} e^{-xn^\alpha}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la seconde série est une série de Riemann convergente du fait que $2 > 1$; d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-xn^\alpha}$ converge si $x > 0$.

(c) Il est démontré dans les deux questions précédentes que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-xn^\alpha}$ converge si $x > 0$

et diverge si $x \leq 0$. Ainsi la somme $S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$ n'est définie que si $x > 0$, et la fonction S_α a pour domaine de définition $]0, +\infty[$.

3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$, on a : $|e^{-xn^\alpha}| = e^{-xn^\alpha} \leq e^{-\varepsilon n^\alpha}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|f_n\|_\infty \leq e^{-\varepsilon n^\alpha},$$

où la norme infinie est considérée sur $[\varepsilon, +\infty[$ (nous avons défini f_n en préambule).

Or nous avons démontré dans la question 2.(b) que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge (prendre

$x = \varepsilon$). D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$. En particulier, pour

tous réels a et b tels que $0 < a \leq b$, on a $[a, b] \subseteq [\varepsilon, +\infty[$, et la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$

converge normalement sur $[a, +\infty[$; elle converge donc aussi normalement, et en particulier uniformément, sur $[a, b]$.

Puisque la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans

$]0, +\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ (c'est la composition de l'application polynomiale $x \mapsto -xn^\alpha$, continue sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$), on en déduit que la somme $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$, en tant que composition de l'application $x \mapsto -xn^\alpha$, décroissante sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de l'application exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels x et y tels que $0 < x \leq y$:

$$f_n(y) \leq f_n(x),$$

et en sommant de 0 à $+\infty$ on a, pour tous réels x et y tels que $0 < x \leq y$: $S_\alpha(y) \leq S_\alpha(x)$. On en déduit que la fonction S_α est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Une fonction monotone admet une limite, éventuellement infinie, en les extrémités de son domaine de définition. On en déduit que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

(c) On rappelle le théorème de la double limite :

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , et soit a une extrémité (éventuellement infinie) de I . On suppose que :

- la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite : $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n$ existe et est finie.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} \ell_n$ converge, et on a : $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Or nous avons démontré dans la question 3.(a) que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (prendre $\varepsilon = 1$; en vérité, le choix de ε n'importe pas ici). De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe et est finie. On en déduit, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1.$$

(d) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-xn^\alpha} \geq 0$, donc :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^N e^{-xn^\alpha} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \geq \sum_{n=0}^N e^{-xn^\alpha}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-xn^\alpha} = e^0 = 1$, par continuité de l'exponentielle en 0. On en déduit, quand $x \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^N 1 = N + 1,$$

l'existence de la limite dans le membre de gauche étant bien établie dans la question 3.(b). Elle est soit finie, soit infinie ; mais si elle est finie, égale à un réel ℓ , alors prendre un entier naturel N tel que : $N + 1 > \ell$ (il en existe vu que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N + 1) = +\infty$; prendre pour N la partie entière de ℓ par exemple) implique une contradiction dans l'inégalité ci-dessus. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x)$ ne peut qu'être infinie, et $S_\alpha > 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x) = +\infty.$$

PARTIE II : étude de la fonction S_2 .

4. On note qu'il s'agit, dans cette question, d'effectuer une comparaison entre série et intégrale.

(a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. L'application $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $-x < 0$, donc l'application $t \mapsto -xt^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et à valeurs $\mathbb{R}$. En composant avec l'exponentielle, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit la décroissance de l'application $t \mapsto e^{-xt^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Elle l'est donc en particulier sur $[n, n + 1]$, et on en déduit :

$$\forall t \in [n, n + 1], \quad e^{-x(n+1)^2} \leq e^{-xt^2} \leq e^{-xn^2}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[n, n+1]$ (ce qui est possible parce que les applications sont manifestement continues sur ce segment), la croissance de l'intégrale nous donne :

$$\int_n^{n+1} e^{-x(n+1)^2} dt \leq \int_n^{n+1} e^{-xt^2} dt \leq \int_n^{n+1} e^{-xn^2} dt.$$

Or nous intégrons des fonctions constantes aux extrémités de cet encadrement, sur un segment de longueur 1. On a donc simplement :

$$e^{-x(n+1)^2} dt \leq \int_n^{n+1} e^{-xt^2} dt \leq e^{-xn^2}, \quad (1)$$

d'où le résultat.

- (b) Soit $x > 0$. La série $\sum_{n \geq 0} e^{-xn^2}$ converge d'après la question 2.(b), et l'application $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de comparaison entre série et intégrale on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} e^{-xt^2} dt$ converge également, et sa somme égale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ d'après la relation de Chasles.

Donc, en sommant (1) pour n allant de 0 à $+\infty$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-xt^2} dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}.$$

En faisant le changement d'indice $n \mapsto n+1$ dans la première somme, et en utilisant la relation de Chasles dans la seconde somme, on obtient :

$$S_2(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \leq S_2(x).$$

On relie l'intégrale en jeu à l'intégrale (de Gauß) de l'énoncé *via* le changement de variable affine : $u = \sqrt{x}t$, licite parce que $t \mapsto \sqrt{x}t$ est de classe C^1 (et : $du = \sqrt{x}dt$), et est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. On obtient alors :

$$S_2(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \leq S_2(x).$$

On relie l'intégrale en jeu à l'intégrale (de Gauß) de l'énoncé *via* le changement de variable affine : $u = \sqrt{x}t$, licite parce que $t \mapsto \sqrt{x}t$ est de classe C^1 (et : $du = \sqrt{x}dt$), et est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. On obtient alors :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \leq S_2(x).$$

D'après l'énoncé : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On en déduit :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

- (c) L'inégalité précédente se réinterprète aussi de la façon suivante :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1, \quad \text{et :} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

Autrement dit :

$$\forall x > 0, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1.$$

Les deux extrémités de cet encadrement ont clairement pour limite 1 quand $x \rightarrow 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_2(x)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}} = 1$. Ainsi :

$$S_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} = +\infty$. On retrouve donc la limite obtenue à la question 3.(d) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S_2(x) = +\infty.$$

5. (a) Soit $x > 0$. On a $e^{-x \cdot 0^2} = 1$ et $e^{-x \cdot 1^2} = e^{-x}$, donc :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2}.$$

Pour tout entier $n \geq 2$ on a $n^2 \geq n$, or $-x < 0$, donc : $-xn^2 \leq -xn$. L'exponentielle étant croissante, on en déduit :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn},$$

d'où le résultat pour tout $x > 0$ (l'existence de cette somme fut établie en question 1.(a)).

(b) Soit $x > 0$. Nous avons calculé la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}$ dans la question 1.(a). En l'utilisant, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn} = \frac{1}{1 - e^{-x}} - (1 + e^{-x}) = \frac{1 - (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - (1 - e^{-2x})}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}.$$

On en déduit, suivant l'inégalité de la question précédente :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq e^x (S_2(x) - (1 + e^{-x})) \leq \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Nous avons déjà calculé la limite de la quantité du membre de droite quand $x \rightarrow +\infty$, dans la question 1.(c) : elle égale 0. D'après le théorème des gendarmes, on a donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (S_2(x) - (1 + e^{-x})) = 0$. On en déduit :

$$S_2(x) - (1 + e^{-x}) = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-x}),$$

ce qu'on réécrit : $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-x})$.

De cela on déduit immédiatement, par définition d'un équivalent :

$$S_2(x) - 1 = e^{-x} + o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}.$$

6. (a) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On reprend la première inégalité de la question 4.(a), en sommant n de N à $+\infty$ (nous avons déjà justifié que c'est possible dans la question 4.(b)), et on obtient :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-xt^2} dt.$$

Il suffit de faire le changement d'indice de sommation $n \mapsto n + 1$ dans la somme pour obtenir l'inégalité voulue :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-xt^2} dt.$$

(b) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On a, d'après la question précédente :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-xn^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-xt^2} dt. \quad (2)$$

Pour estimer cette intégrale nous suivons l'indication de l'énoncé en faisant un changement de variable. Le passage de e^{-xt^2} à e^{-u} suggère le changement de variable : $u = xt^2$.

L'application $t \mapsto xt^2$ est de classe C^1 sur $[N, +\infty[$, et strictement croissante de $[N, +\infty[$ dans $[xN^2, +\infty[$. Le changement de variable : $u = xt^2$ dans l'intégrale $\int_N^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ est donc licite (on a : $du = 2xt dt$). Cette intégrale converge d'après la question 4.(b), et on a :

$$\int_N^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \int_N^{+\infty} e^{-xt^2} \frac{2xt dt}{2xt} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_N^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{\sqrt{xt^2}} (2xt dt),$$

donc l'intégrale $\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ converge d'après la formule du changement de variable, et :

$$\int_N^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

Reprenant l'inégalité (2), on en déduit :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-xn^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

Il reste à majorer cette dernière intégrale. On saurait l'intégrer sans dommage sans la présence du quotient par $\sqrt{u}$. On y remédie en majorant $\frac{1}{\sqrt{u}}$ par une constante : pour tout $u \geq xN^2$ on a $\sqrt{u} \geq \sqrt{xN^2} = N\sqrt{x}$, donc :

$$\int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{1}{N\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{N\sqrt{x}} [-e^{-u}]_{xN^2}^{+\infty} = \frac{e^{-xN^2}}{N\sqrt{x}}.$$

On conclut :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-xn^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{1}{N\sqrt{x}} \times \frac{e^{-xN^2}}{N\sqrt{x}} = \frac{e^{-xN^2}}{2Nx},$$

d'où le résultat pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.

(c) Soit $x > 0$. Si, pour $\varepsilon > 0$, on a : $\frac{e^{-xN^2}}{2Nx} < \varepsilon$, alors :

$$0 \leq S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-xn^2} < \varepsilon,$$

et dans ce cas la somme partielle $\sum_{n=0}^N e^{-xn^2}$ donne une valeur approchée de $S_2(x)$ à ε près.

Or l'inégalité : $\frac{e^{-xN^2}}{2Nx} < \varepsilon$ est nécessairement vérifiée pour N suffisamment grand, puisque le terme de gauche tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$. Voici donc un moyen informel d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varepsilon > 0$ près :

- i. On prend $N = 0$.
- ii. Tant que $\frac{e^{-xN^2}}{2Nx} \geq \varepsilon$, on remplace N par $N + 1$.
- iii. Dès que N vérifie : $\frac{e^{-xN^2}}{2Nx} \geq \varepsilon$, on calcule et on sort $\sum_{n=0}^N e^{-xn^2}$.

Un peu plus formellement :

```

proc\'edure calcul_de_S2(x, ε)
  N ← 0
  S ← 0
  tant que  $\frac{e^{-xN^2}}{2Nx} \geq \varepsilon$ 
    N ← N + 1
  fin tant que
  pour n de 0 à N faire
    S ← S + e-xn2
  fin pour
  imprimer S
fin proc\'edure

```

(Remarque sur la complexité : si on veut s'affranchir de la seconde étape, il suffit de remarquer que l'inégalité : $\frac{e^{-xN^2}}{2Nx} < \varepsilon$ est vérifiée dès que : $\frac{1}{2Nx} < \varepsilon$, c'est-à-dire : $N > \frac{1}{2x\varepsilon}$. Mais la suite $\left(\frac{1}{2Nx}\right)_{N \geq 1}$ converge BEAUCOUP moins vite vers 0 que la suite $\left(\frac{e^{-xN^2}}{2Nx}\right)_{N \geq 1}$. En termes de complexité on y perd énormément. En fait, on saurait démontrer, grâce à des méthodes non exigibles, que l'inégalité : $\frac{e^{-xN^2}}{2Nx} < \varepsilon$ est vérifiée dès que :

$$N > \sqrt{\frac{1}{2x} \left(\ln \left(\frac{1}{2x\varepsilon^2} \right) - \ln \left(\ln \left(\frac{1}{2x\varepsilon^2} \right) \right) + \frac{1}{2} \right)};$$

donc en particulier pour $N > \sqrt{\frac{1}{2x} \ln \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2x\varepsilon^2} \right)}$: on « gagne » un logarithme et cela nécessite bien moins de termes à calculer !

- (d) Nous avons droit à la calculatrice. Cela permet de déterminer à peu de frais pour quelles valeurs entières N on a $\frac{e^{-N^2}}{2N} < 10^{-7}$ (ici $x = 1$ et $\varepsilon = 10^{-7}$) : c'est déjà le cas pour $N = 4$. Par conséquent, d'après la question qui précède :

$$S_2(1) \approx \sum_{n=0}^4 e^{-n^2} = 1 + e^{-1} + e^{-4} + e^{-9} + e^{-16} \approx 1,3863186 \quad (\text{à } 10^{-7} \text{ près}).$$

(La remarque ci-dessus sur la complexité prend tout son sens ici : calculer $\sum_{n=0}^{5 \cdot 10^6 + 1} e^{-nx^2}$ – on a pris $N > \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}}$ – éprouve indiscutablement plus la calculatrice que le calcul de $\sum_{n=0}^5 e^{-nx^2}$ – on a pris $N > \sqrt{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 10^{14}} \right)}$ – !)

PARTIE III : étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$.

7. On note que Γ est la fonction Γ d'Euler.

- (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$: les seuls problèmes éventuels d'intégrabilité sont au voisinage de 0 et de $+\infty$. La fonction étant positive, on peut procéder par relation de comparaison.

Convergence de l'intégrale $\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}du$. La convergence équivaut ici à l'intégrabilité, toujours par positivité de l'intégrande. On a :

$$e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u^{\alpha-1} = \frac{1}{u^{1-\alpha}}.$$

L'application $u \mapsto \frac{1}{u^{1-\alpha}}$ est une fonction de Riemann : elle est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1 - \alpha < 1$, si et seulement si $\alpha > 0$. On en déduit, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$. On a, d'après le théorème des croissances comparées : $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 \cdot u^{\alpha-1}e^{-u} = 0$. On en déduit :

$$e^{-u}u^{\alpha-1} = o_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u^2} \right).$$

Or la fonction de Riemann $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ l'est également d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

En conclusion : l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge si et seulement si les intégrales $\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}du$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ convergent. D'après l'étude qui précède, leur convergence simultanément est assurée si et seulement si $\alpha > 0$.

On en déduit que $\Gamma(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

- (b) Soient a , et b des réels tels que $0 < a \leq b$. On intègre par parties sur le segment $[a, b]$: l'application $u \mapsto e^{-u}$ est continue sur $[a, b]$ et l'application $u \mapsto u^\alpha$ est de classe C^1 sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\int_a^b e^{-u}u^\alpha du = \left[-e^{-u}u^\alpha \right]_a^b - \int_a^b (-e^{-u})\alpha u^{\alpha-1} du = -e^{-b}b^\alpha + e^{-a}a^\alpha + \alpha \int_a^b e^{-u}u^{\alpha-1} du.$$

Or : $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} b^\alpha = 0$ d'après le théorème des croissances comparées, et, du fait que $\alpha > 0$, on a : $\lim_{a \rightarrow 0} e^{-a} a^\alpha = 1 \times 0 = 0$. On en déduit, quand $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} u^\alpha du = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du,$$

c'est-à-dire : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.

On a immédiatement : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1$. Voyons comment, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on en déduit l'égalité : $\Gamma(n+1) = n!$. Si $n = 0$, cela vient d'être établi, vu que $0! = 1$ et $\Gamma(1) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\Gamma(n+1) = n!$. Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus : $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$, donc l'égalité voulue est héréditaire. Nous l'avons initialisée, donc par principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

(c) Soit $x > 0$. On a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

Par un raisonnement analogue à celui de la question 6.(b), *mutatis mutandis*, le changement de variable : $u = xt^\alpha$ est licite (et on a : $du = \alpha x t^{\alpha-1} dt$), et nous permet d'en déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} t^{1-\alpha} (\alpha x t^{\alpha-1} dt) = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$; or cette intégrale est, à une constante multiplicative près, l'intégrale $I(\alpha)$; ceci démontre donc sa convergence, et on a de plus :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} I(\alpha).$$

Notons qu'on retrouve l'égalité démontrée (avec $\alpha = 2$ et $N = 0$) dans la question 6.(b).

8. (a) Soit $x > 0$. On refait une comparaison entre série et intégrale, comme à la question 4. L'application $t \mapsto e^{-xt^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ par un raisonnement analogue. En reprenant tout ce qu'on a établi, *mutatis mutandis*, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha},$$

c'est-à-dire :

$$S_\alpha(x) - 1 \leq I(\alpha) \leq S_\alpha(x).$$

On en déduit : $S_\alpha(x) \leq I(\alpha) + 1$, et de plus $I(\alpha) \leq S_\alpha(x)$ donc cet encadrement peut également s'écrire :

$$I(\alpha) \leq S_\alpha(x) \leq I(\alpha) + 1.$$

Or, d'après la question précédente : $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ (on peut effectuer la division car $\alpha > 0$ et $x > 0$ par hypothèse). On en déduit, en soustrayant $I(\alpha)$ de chaque membre de l'encadrement :

$$0 \leq S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq 1,$$

d'où le résultat attendu.

- (b) On a $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$: il s'agit de l'intégrale sur $]0, +\infty[$ d'une fonction CONTINUE, positive et non identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x > 0$ on a, partant de l'encadrement la question précédente où l'on divise tout par $\frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$, puis ajoute 1 :

$$1 \leq \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} S_{\alpha}(x) \leq \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + 1,$$

or $\frac{1}{\alpha} > 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\alpha}} = 0$. Il est alors immédiat que les deux extrémités de l'encadrement ci-dessus ont pour limite 1 quand $x \rightarrow 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes :
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} S_{\alpha}(x) = 1$. C'est-à-dire :

$$S_{\alpha}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = +\infty$. On retrouve donc le résultat de la question 4.(c) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_{\alpha}(x) = +\infty.$$

9. (a) Il suffit de reprendre le changement de variable $u = xt^{\alpha}$ de la question 7.(c) en changeant les bornes. Si $x > 0$, alors l'application $t \mapsto xt^{\alpha}$ est strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[x, +\infty[$, et on en déduit :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du. \quad (3)$$

- (b) Soit $x > 0$, et soit $b \geq x$. Nous allons intégrer par parties sur le segment $[x, b]$: l'application $u \mapsto e^{-u}$ est continue sur $[a, x]$ et l'application $u \mapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est de classe C^1 sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_x^b e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du &= \left[-e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} \right]_x^b - \int_x^b (-e^{-u}) \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \\ &= -e^{-b} b^{\frac{1}{\alpha}-1} + e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \int_x^b e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du. \end{aligned}$$

Or : $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} b^{\frac{1}{\alpha}-1} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées. On en déduit, quand $b \rightarrow +\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du, \quad (4)$$

d'où l'égalité demandée pour tout $x > 0$.

L'objectif de ce qui suit est de démontrer que l'intégrale du membre de droite est négligeable devant $\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$, de sorte à obtenir ainsi un équivalent de l'intégrale de gauche. Pour cela, l'énoncé nous demande de démontrer l'inégalité :

$$\forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

Pour la démontrer, il suffit d'utiliser la minoration $u \geq x$ valable pour tout $u \geq x$, qui implique en particulier :

$$\forall u \in [x, +\infty[, \quad e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} = u^{-1} \cdot e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} \leq x^{-1} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[x, +\infty[$, on en déduit l'inégalité demandée :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du. \quad (5)$$

On en déduit aisément : $\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \right)$ (le quotient des deux intégrales est majoré par $\frac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$). En combinant (4) et (5), on obtient donc :

$$\begin{aligned} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} &= \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \\ &= \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}. \quad (6)$$

(c) On combine (3) et (6), et on en déduit :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{\alpha x}.$$

À l'évidence, le terme de droite est négligeable devant e^{-x} quand $x \rightarrow +\infty$ (puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x} = 0$), donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$ est négligeable devant e^{-x} quand $x \rightarrow +\infty$.

10. (a) On reprend la comparaison entre série et intégrale de la question 8.(c), mais en sommant à partir de $n = 1$ au lieu de $n = 0$, et on ne conserve que la première inégalité. On obtient alors :

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt.$$

(b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$S_\alpha(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}.$$

On en déduit :

$$\forall x > 0, \quad e^{-x} \leq S_\alpha(x) - 1 \leq e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}. \quad (7)$$

Or, d'après les questions 9.(c) et 10.(a), on a :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (e^{-x}),$$

ce dont on déduit que : $\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (e^{-x})$, puis :

ce dont on déduit que : $\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = o_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x})$, puis :

$$e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + o_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}.$$

Donc, d'après l'encadrement (7) (et un usage soigné du théorème des gendarmes), on en déduit :

$$S_\alpha(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}.$$