



2025 – 2026

Compléments d'algèbre linéaire

0 – Machinbidules que tout le monde il doit savoir le faire en moins de 5 minutes...

Exercice 1

Soit $a < b$, et $F = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \int_a^b f(t) dt = 0 \right\}$, muni des opérations usuelles.

Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.

Exercice 2

Soit $F = \left\{ (5x + 3y, x - 4y, 2x), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\dim F$, et donner une base de F .

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ si, et seulement si, $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 4

Les espaces ci – dessous sont munis de leur base canonique.

Déterminer les matrices, relativement à ces bases, des applications linéaires f suivantes :

$$1. \quad f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z, x - 2y + 4z) \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(2), P'(1), P(-1)) \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P \mapsto \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (P(i) - P'(j)) E_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit $\Phi: \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (M, P) \mapsto (M_{1,1} + P(n))_{n \in \mathbb{N}} \end{pmatrix}$. Montrer que Φ est une application linéaire.

I – Révisions d'algèbre linéaire de première année

Exercice 6

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, le plan P d'équation $z = x - y$, et la droite D d'équations $x = -y = z$.

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .

Exercice 7

Soit $E = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n \right\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie égale à 3.
2. Soit F le sous – ensemble de E constitué des suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Montrer que F est un sous – espace vectoriel de E .

Quelle est sa dimension ? En donner une base.

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E .

On désigne par p l'indice de nilpotence de u .

Montrer que :
$$\frac{n}{n - \text{rg}(u)} \leq p \leq \text{rg}(u) + 1.$$

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non inversible. Montrer qu'il existe deux matrices inversibles $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et une matrice nilpotente N , telles que $N = P^{-1} M Q$.

Exercice 10

Soit A une matrice carrée telle que $A^{2026} = 0$.

Montrer que pour tout entier $n > 0$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A + A^2 + \dots + A^n)$.

Exercice 11

On considère le système linéaire $(\Sigma) : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - 4y - z = 0 \end{cases}$.

On a résolu ce système par la méthode du pivot de Gauss, en faisant une seule opération élémentaire (du type $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ par étape, et l'on a représenté à chaque étape les trois plans correspondants.

On a donc obtenu 7 figures, qui sont données ci – dessous.

Les figures ont, malencontreusement, été mélangées.

Reconstituer l'ordre des figures, ainsi que le système à chacune des étapes.

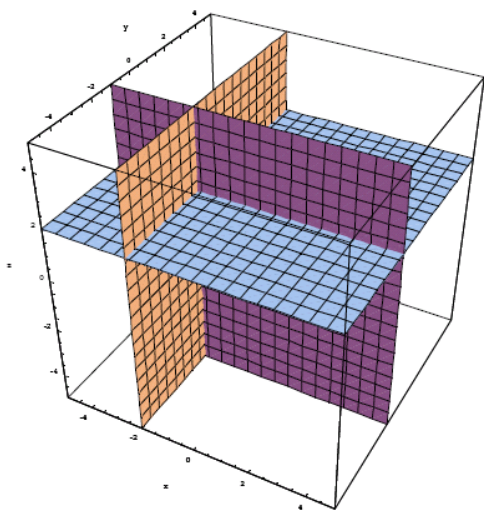


Figure A

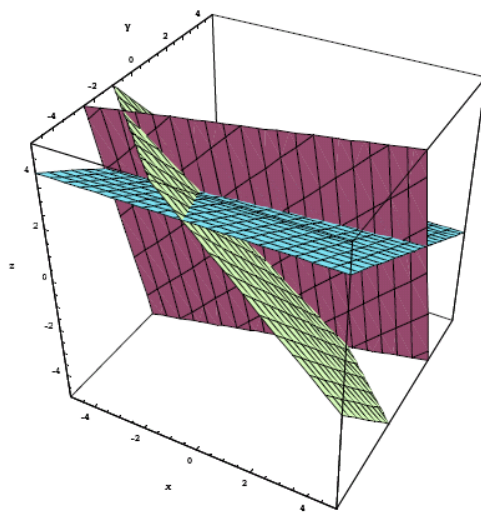


Figure B

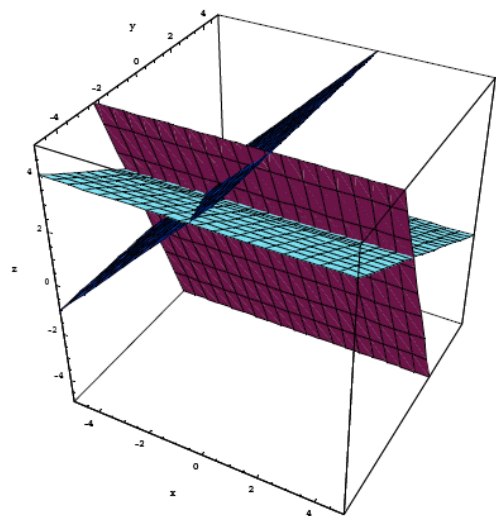


Figure C

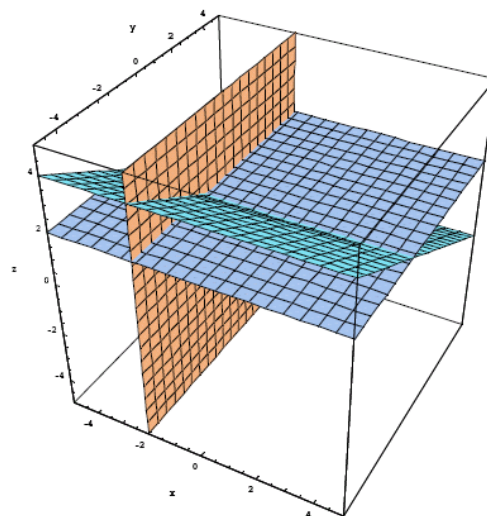


Figure D

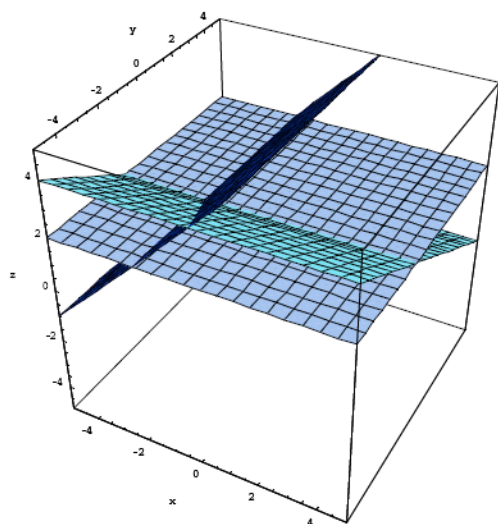


Figure E

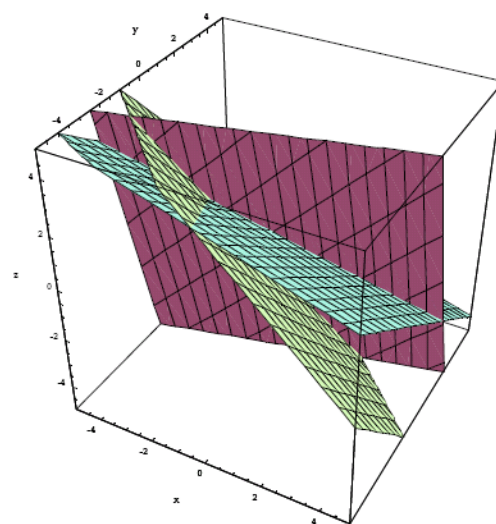


Figure F

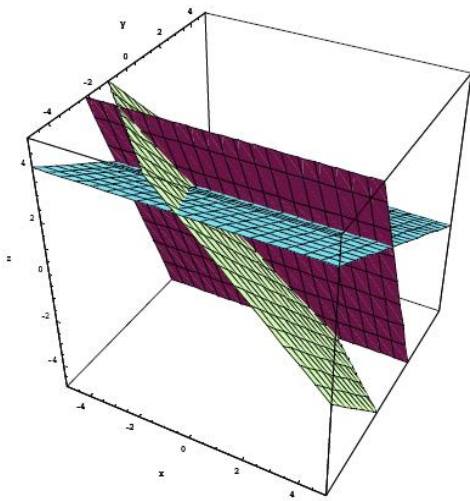


Figure G

Exercice 12

Soient $(n, p, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r . On note J_r la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe deux matrices inversibles $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $J_r = Q^{-1} A P$.

hint On pourra introduire l'application linéaire f canoniquement associée à A .

Exercice 13

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et O la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Soit alors $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $M \in \mathcal{GL}_{p+q}(\mathbb{K}) \Rightarrow (A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K}))$.

hint On écrira M^{-1} sous forme triangulaire par blocs.

2. Montrer inversement que :

$$(A \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K})) \Rightarrow M \in \mathcal{GL}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

hint On cherchera une matrice triangulaire par blocs M' telle que $M \cdot M' = I_{p+q}$.

Exercice 14

Préliminaire

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On désigne par $f|_{\text{Im } f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im } f$.

Montrer que $\text{Ker}(f|_{\text{Im } f}) = \text{Ker } f \cap \text{Im } f$, et que $\text{Im}(f|_{\text{Im } f}) = \text{Im}(f^2)$.

Enoncé principal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie égale à $3n$.

On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\text{rg}(f) = 2n$.

1. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Im}(f^2)$.

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} O_n & O_n & O_n \\ I_n & O_n & O_n \\ O_n & I_n & O_n \end{pmatrix}$.

II – Trace ; formes linéaires

Exercice 15

1. Montrer qu'il n'existe aucun couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 17

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application linéaire $X \mapsto AXB$.

Démontrer la formule : $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A) \times \text{Tr}(B)$.

Exercice 18

Dans tout cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

0. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application Φ_A définie par : $\Phi_A : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \text{Tr}(AM) \end{pmatrix}$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Réciproquement, soit $\Phi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$. Montrer que : $\exists ! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \Phi = \Phi_A$.

2. Montrer que, dans tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible.

3. Déterminer toutes les formes linéaires Ψ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \Psi(MN) = \Psi(NM).$$

III – Interpolation

Exercice 19

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ trois réels distincts, et $P \in \mathbb{R}[X]$.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)(X-c)$.

On utilisera les polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 20

1. On pose $H_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

En déduire que le produit de n entiers relatifs consécutifs est divisible par $n!$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence de :

i – $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

ii – $\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(k) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 21

Soient $n \in \mathbb{N}$, E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, F un sous – espace vectoriel de E , et $u_0, \dots, u_n$ des vecteurs de E .

On définit une application $P: \mathbb{K} \rightarrow E$ par : $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{k=1}^n x^k u_k$. Montrer que, s'il existe $n+1$

éléments distincts de $\mathbb{K}$ tels que $P(x) \in F$, alors les vecteurs $u_0, \dots, u_n$ appartiennent tous à F .

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que P prend des valeurs rationnelles en $n+1$ rationnels $(q_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Montrer que $P \in \mathbb{Q}_n[X]$, autrement dit que les coefficients de P sont rationnels.

Exercice 23

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ n réels distincts, $(b_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ et $(c_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ $2n$ réels quelconques.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(a_k) = b_k \text{ et } P'(a_k) = c_k.$$

IV – Projecteurs ; sommes directes

Exercice 24

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $f_1, \dots, f_p$ des endomorphismes de E .

On suppose que $f_1 + f_2 + \dots + f_p = \text{Id}$ et $\sum_{i=1}^p \text{rg}(f_i) \leq n$.

Montrer que les f_i sont des projecteurs *orthogonaux*, en ce sens que $f_i \circ f_j = 0$ dès que $i \neq j$.

On pourra d'abord montrer que E est somme directe des images des f_i .

Exercice 25

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f^3 = f^2 + 2f$. On pose :

$$E_1 = \text{Ker } f, E_2 = \text{Ker } (f + Id_E), \text{ et } E_3 = \text{Ker } (f - 2 Id_E).$$

1. Montrer que $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E$.

Pour $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}$ distincts, soit p_i la projection sur E_i parallèlement à $E_j \oplus E_k$.

2. Exprimer f en fonction des $(p_i)_{i \in \{1, 2, 3\}}$.

3. En déduire qu'il existe des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3.$$

4. Montrer alors qu'il existe des suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = \alpha_n Id_E + \beta_n f + \chi_n f^2,$$

et déterminer ces suites.

Exercice 26

Soient E un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f^3 = Id_E$.

1. Montrer que : $\text{Ker } (f - Id_E) \oplus \text{Ker } (f - j Id_E) \oplus \text{Ker } (f - j^2 Id_E) = E$.

2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 27

Soient $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,

$G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, $H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.

2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 28

Soient F_1, F_2, F_3 trois sous – espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que la somme $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$.

2. Généraliser.

Exercice 29

Soit $(a_k)_{k \in \{0, n\}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ réels **distincts**. Montrer que :

$$\exists ! (\lambda_k)_{k \in \{0, n\}} \in \mathbb{R}^{n+1} / \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k) = \int_0^1 P(t) dt.$$

On donnera si possible deux démonstrations : l'une utilisant la **base des polynômes**

interpolateurs de Lagrange, et l'autre l'**invertibilité des matrices de Vandermonde**.

Exercice 30

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour $i \in \{1, n\}$, on note $F_i = \{u \in \mathcal{L}(E), \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(e_i)\}$.

1. Caractériser matriciellement les éléments de F_i .
2. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = \mathcal{L}(E)$.

Exercice 31

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 + F_2 + \dots + F_n = E$.

Montrer qu'il existe des sous-ev $G_1 \subset F_1, G_2 \subset F_2, \dots, G_n \subset F_n$ tels que $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n = E$.

Exercice 32

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n = E$, et F un autre sous-espace vectoriel de E . Pour tout $i \in \{1, n\}$, on pose $F_i = E_i \cap F$.

1. Montrer que la somme $G = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe.
2. Comparer F et G .

Exercice 33

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n = E$. Soit, pour tout $i \in \{1, n\}$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$.

1. **Montrer** qu'il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout i , $u_i = u|_{E_i}$.
2. Montrer qu'alors $\text{Ker } u = \text{Ker } u_1 \oplus \text{Ker } u_2 \oplus \dots \oplus \text{Ker } u_n$ et $\text{Im } u = \text{Im } u_1 \oplus \text{Im } u_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } u_n$.

Exercice 34

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs de E tels que

$\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$, et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = E$.

1. **Montrer** que pour tout $i \in \{1, n\}$, $\text{rg } p_i = \text{Tr } p_i$.
2. Montrer que $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n$.

Exercice 35

Soit E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On pose

$$F_1 = \{f \in E / \forall z \in \mathbb{C}, f(jz) = f(z)\},$$

$$F_2 = \{f \in E / \forall z \in \mathbb{C}, f(jz) = jf(z)\}, \text{ et}$$

$$F_3 = \{f \in E / \forall z \in \mathbb{C}, f(jz) = j^2 f(z)\}.$$

1. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$.
2. Généraliser.