



2025-2026

DM N°2 – à rendre la semaine du 03/11

Ce sujet comporte 8 pages, et est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème I – Matrices semblables à leur transposée

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n .

On note A^T la matrice transposée d'une matrice A .

Le but de ce problème est de montrer que toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Partie I – Questions préliminaires

- Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux bases de E . On note P la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$.
 - Soient f un endomorphisme de E , A sa matrice dans la base $\mathcal{U}$ et B sa matrice dans la base $\mathcal{V}$.
Exprimer A en fonction de B , de P et de P^{-1} (On ne demande pas de démonstration).
 - Soient M et N deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on rappelle que M est dite semblable à N lorsqu'il existe une matrice inversible Q appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q N Q^{-1}$.
Montrer que si M est semblable à N , alors N est semblable à M .
On dit pourra donc dire désormais, de façon abrégée, que « M et N sont semblables ».
 - Soient A , B et C trois matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est semblable à B et que B est semblable à C .
Montrer que A et C sont semblables. Montrer aussi que A^T et B^T sont semblables.
 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est semblable à une matrice diagonale, A et A^T sont semblables.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $P(X) = \det(X I_n - A)$.
Montrer que P est un polynôme de degré n . En déduire qu'il existe un nombre fini de complexes z tels que $z I_n - A$ soit non inversible.
- Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que ces deux matrices, considérées comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sont semblables : il existe donc $R \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = R^{-1} A R$,
et l'on pose $P = \operatorname{Re}(R)$, $Q = \operatorname{Im}(R)$ (matrices dont les coefficients sont respectivement égaux à la partie réelle, et à la

partie imaginaire, de ceux de R).

- a. Montrer, à l'aide de 2., qu'il existe un nombre fini de complexes z pour lesquels la matrice $(P + iQ) + zQ$ est non inversible.
- b. En déduire l'existence d'un réel x tel que $P + xQ$ est inversible.
- c. Montrer que les matrices A et B , considérées comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont semblables.

4. Cet exemple est sans influence sur la suite du problème

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit la

matrice T donnée par : $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_2)$?

Conclure.

Partie II – Cas des endomorphismes nilpotents

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et l'on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A .

On suppose f nilpotent. On note alors p son indice de nilpotence, ie l'unique entier $p \geq 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Soit x un élément de $\mathbb{C}^n$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.

Montrer que la famille $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.

En déduire que $p \leq n$.

- 2.a. On suppose que $p = 1$. Montrer qu'alors A et ${}^t A$ sont semblables.

- b. On suppose que $p = n$. Soit x un élément de $\mathbb{C}^n$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

Déterminer la matrice de f dans la base $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$, et sa matrice dans la

base $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \dots, f(x), x)$.

En déduire que A est semblable à A^T .

Dans la suite de cette partie, on considère le cas où $1 < p < n$.

On considère un élément x de $\mathbb{C}^n$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. On pose $u_p = x, u_{p-1} = f(x), \dots, u_1 = f^{p-1}(x)$, et on complète la famille libre $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ en une base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

On note U la matrice de f sur cette base, et P la matrice carrée de taille n dont la k -ième ligne est égale à la première ligne

de U^{k-1} , et ce pour tout entier k compris entre 1 et n .

3. Montrer que les lignes de cette matrice P , à partir de la $p+1$ -ème, sont nulles.

Que peut-on en déduire quant au rang de P ?

4. Pour j et k entre 1 et p , préciser $f^k(u_j)$ suivant que $k < j$, $k = j$ ou $k > j$.

En déduire les p premiers termes de la k -ième ligne de P .

Montrer que la matrice P est de rang p .

5. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ admettant P pour matrice dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $\mathbb{C}^n$, et

soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

a. Montrer que pour tout u de W , on a $g(v) = v$.

En déduire que W et le noyau de g sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

b. Montrer que ces deux sous-espaces sont stables par f (On rappelle qu'un sous-espace F d'un espace vectoriel E est dit stable par un endomorphisme ϕ de E si l'on a : $\phi(F) \subset F$).

6. Montrer, par récurrence sur n , que toute matrice nilpotente $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée.

Partie III – Cas général.

Dans cette partie, on revient au cas général : A est donc une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et l'on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est égale à A .

1. Soient G et H deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$, stables par f (ie $f(G) \subset G$ et $f(H) \subset H$).

On note $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base de G et $(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n)$ une base de H .

Soit M la matrice de f dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

a. Montrer que M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$,

où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$; on précisera la taille des matrices nulles intervenant dans M .

b. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur G : $g : \begin{pmatrix} G \rightarrow G \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$ est bien défini, et admet pour matrice dans la

base $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de G la matrice B .

2. On considère un complexe λ . On note : $g = f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$. Soit $H = \{x \in \mathbb{C}^n, \exists n_x \in \mathbb{N}, g^{n_x}(x) = 0\}$.

a. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$.

On note m la dimension de H .

b. Montrer que H est stable par g .

On note alors h l'endomorphisme induit par g sur H , défini par : $h : \begin{cases} H \rightarrow H \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$

c. Montrer que h est nilpotent.

d. En déduire que $h^m = 0$.

On suppose par récurrence que toute matrice carrée de taille comprise entre 1 et $n - 1$ est semblable à sa transposée.

3. On suppose ici qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G , stables par f et supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$, aucun de ces deux sous-espaces n'étant réduit au vecteur nul. En considérant les endomorphismes induits par f sur F et sur G , montrer que A est semblable à A^T .

4. On suppose ici qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$ soit nilpotent. Montrer que A est semblable à sa transposée.

On suppose désormais que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$ n'est pas nilpotent.

5. Montrer que la famille $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas libre.

Il existe donc un plus petit entier p tel que la famille $(f^k)_{k \in [0, p]}$ soit liée. On considère des complexes $a_0, a_1, \dots, a_p$,

avec a_p non nul, tels que $\sum_{k=0}^p a_k f^k = 0$. On note alors P le polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k = 0$. On considère une racine λ

de P , et l'on note m sa multiplicité : le polynôme P s'écrit donc sous la forme $P = (X - \lambda)^m Q(X)$, où

$Q = \sum_{k=0}^{p-m} b_k X^k$ est un polynôme n'admettant pas λ pour racine. On pose enfin $g = (f - \lambda \text{Id})^m$, et $h = \sum_{k=0}^{p-m} b_k f^k$.

On remarque que l'on a : $g \circ h = 0$.

6. Montrer que $\text{Ker } g$ et $\text{Ker } h$ sont tous les deux stables par f , et non égaux à $\mathbb{C}^n$.

7.** Montrer que $\text{Ker } g \oplus \text{Ker } h = \mathbb{C}^n$. Il n'est pas conseillé de traiter cette question : admettre.

8. En déduire que A est semblable à sa transposée.

PROBLÈME 2

Ce problème aborde l'étude d'une transformation intégrale utilisée pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier. Celle-ci permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie 1 étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie 2 aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie 3 traite le cas particulier d'un signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie 4 étudie le cas particulier d'un signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie 5 pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1 Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de f*) définie par

$$\forall \xi, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt$$

1.A On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

1.B On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

1.B.1 Montrer qu'il existe des fonctions f_n , que l'on déterminera, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x). \quad \text{En déduire que } \psi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.$$

1.B.2 Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} |\psi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm} .

1.C Soit $f \in E_{cpm}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.D.2 Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}, (\mathcal{F}(f))^n(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi t \xi} dt$$

1.E On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, y'(\xi) = -2\pi \xi y(\xi)$$

1.E.2 Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) dx = 1$.

2 Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(t) dt$$

2.A Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$.

2.B Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

2.C Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = J_n$.

On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi \xi t} d\xi \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi \xi t} dt \right) d\xi$$

2.D Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$.

En déduire en utilisant la fonction $h : t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi \quad (2.1)$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

2.E Une application

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi \xi x}}{1+(2\pi \xi)^2} d\xi = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

3 Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$.

D'après la relation (2.1), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$$

3.A Démontrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.B Prouver que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi \xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x_0 \xi} d\xi = f(x)$$

3.C On suppose que f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$. Montrer que $f = 0$.

4 Cas de fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n , on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

- la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)} \quad g(0) = 0 \quad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

- la suite de complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

4.A

4.A.1 Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ et continue sur $] -1, 1[$.

4.A.2 Calculer la limite de g' en 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $] -1, 1[$.

On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

4.B Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x) dx$.

4.C Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}, S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

4.D Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=-n}^n c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx$$

4.E A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx \right| \leq \frac{C}{2n+1}$$

4.F Soit $t \in [-1/2, 1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2, 1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], G_t(x) = f'(x+t) \sin(\pi x) - (f(x+t) - f(t)) \pi \cos(\pi x)$$

Etablir l'existence d'un réel D , indépendant de x et de t , tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], |G_t(x)| \leq Dx^2$$

4.G Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left| f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{2i\pi k t} \right| \leq \frac{E}{2n+1} \quad (4.1)$$

On pourra introduire la fonction $h_t : x \mapsto f(x+t)$.

5 Formule d'échantillonnage de Shannon

Soit $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \psi_k(x) = \psi(x + k) \quad (5.1)$$

où ψ est définie à la question 1.B.

5.A Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\frac{1}{2}) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}(-\frac{1}{2}) = 0$.

5.B Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5.C A l'aide de l'inégalité (4.1), prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \sum_{k=-n}^n d_k e^{2\pi i k x} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2, 1/2]$.

5.D Démontrer que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=-n}^n d_k \psi_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On notera symboliquement $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \psi_k$.

5.E Etablir que $\forall j \in \mathbb{Z}, f(-j) = d_j$.

L'égalité $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) \psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$.