

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Familles libres, génératrices, bases

1. Combinaisons linéaires

Définition (combinaisons linéaires ; espace vectoriel engendré)

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

- Soit $x \in E$. On dit que x est **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe une

famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de $\mathcal{F}$, et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{i_k}$.

- L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ est noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$. C'est un sous – espace vectoriel de E , appelé sous – espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.

2. Familles génératrices

a. Définition (familles génératrices)

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille **génératrice** de E lorsque $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.
- Ainsi, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E lorsque :

i – pour tout $i \in I$, u_i appartient à E ;

ii – tout vecteur u de E s'écrit comme combinaison linéaire (finie) des vecteurs u_i :

$$\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (i_1, \dots, i_n) \in I^n, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{i_k}.$$

b. Propriétés

i – Si $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , alors toute sur – famille de $\mathcal{F}$ dans E est génératrice de E .

[Une sur – famille de $\mathcal{F}$ dans E est une famille de vecteurs de E contenant les vecteurs u_i , $i \in I$].

ii – Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille **finie** de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E . Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est

génératrice de E si et seulement si l'application linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \end{pmatrix}$ est surjective.

iii – Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Alors

- la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ engendre $\text{Im}(f)$;
- f est surjective si et seulement si $(f(u_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .

3. Familles libres, familles liées

a. Définition (familles libres)

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E .

- La famille $\mathcal{F}$ est dite **libre** lorsque toute sous – famille **finie** de $\mathcal{F}$ est libre, c'est – à – dire lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \{i_1, \dots, i_n\} \subset I, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{i_k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On dit alors que les vecteurs $u_i, i \in I$, sont linéairement indépendants.

Dans le cas d'une famille $\mathcal{F} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indexée par l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathcal{F}$ est donc libre si

$$\text{et seulement si : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille **liée** lorsqu'il existe une combinaison nulle à coefficients non tous nuls des u_i ,

$$\text{i.e. lorsque : } \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \{i_1, \dots, i_n\} \subset I, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus (0, 0, \dots, 0), \sum_{k=1}^n \lambda_k u_{i_k} = 0.$$

On appelle alors **relation de dépendance linéaire** entre les vecteurs u_i toute relation de la forme :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k u_{i_k} = 0, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ non tous nuls.}$$

b. Propriétés

i – Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E , alors toute sous – famille de $\mathcal{F}$ est une famille libre.

ii – Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille **finie** de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E . Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si

$$\text{et seulement si l'application linéaire } \varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \end{cases} \text{ est injective.}$$

iii – Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille libre de vecteurs de E .

Alors si f est injective, la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est une famille libre.

Plus précisément, f est injective si et seulement si l'image par f de **toute** famille libre de E est une famille libre.

4. Bases d'un espace vectoriel

a. Définition (base d'un espace vectoriel)

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est une **base** de E lorsque $(u_i)_{i \in I}$ est à la fois une famille libre et génératrice de E .

En particulier, une famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si :

$$\forall u \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

b. Un résultat admis

On *admettra*, donc, que tout espace vectoriel admet une base.

c. Bases canoniques d'espaces vectoriels de référence

- La famille formée des vecteurs $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 0, \dots, 1)$ (dans cet ordre) est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.
- **Rappel de notation**

Soient x et y deux entiers. Le symbole de Kronecker $\delta_{x,y}$ est défini par $\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Matrices élémentaires

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(a, b) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, notons $E_{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne est : $E_{a,b}(i, j) = \delta_{i,a} \delta_{j,b}$.

Les matrices $E_{a,b}$ sont appelées **matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $(E_{a,b})_{(a,b) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}}$ est une base de cet espace ; on dit (avec un léger abus de langage) que c'est **une** base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

d. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (u_i)_{i \in I}$ une base de E .

Tout élément de u de E s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, sous la forme : $u = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$, où les λ_i sont des scalaires presque tous nuls (ie. tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux).

On dit alors que les λ_i , $i \in I$, sont les **coordonnées**, ou les **composantes**, de u dans la base $\mathcal{B}$.

Dans le cas d'une base finie $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$, on dit que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. On

pourra noter : $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

e. Propriétés

i – Si $\mathcal{B}$ est une base de E , toute sous-famille de $\mathcal{B}$ est libre, et toute sur-famille de $\mathcal{B}$ dans E est génératrice de E .

ii – Soit $(u_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E . Alors $(u_i)_{i \in I}$ est une base

de E si et seulement si l'application linéaire $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & \rightarrow & E \\ (\lambda_i)_{i \in I} & \mapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \end{pmatrix}$ est bijective.

iii – Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $(u_i)_{i \in I}$ une base de E .

Alors f est bijective si et seulement si la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est une base de F .

II Sommes, sommes directes de sous – espaces vectoriels

1. Somme de sous – espaces vectoriels

a. Définition (somme de sous – espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E . On note $\sum_{i=1}^n E_i$ l'ensemble $\left\{ \sum_{k=1}^n x_k, (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i \right\}$. $\sum_{i=1}^n E_i$ est appelé **somme des sous – espaces vectoriels** E_i .

b. Propriétés

i – $\sum_{i=1}^n E_i$ est un sous – espace vectoriel de E .

ii – $\sum_{i=1}^n E_i$ est le plus petit sous – espace vectoriel de E contenant chacun des E_i .

c. Remarques

- On peut, de manière plus générale, définir la somme d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ de

sous – espaces vectoriels de E par : $\sum_{i \in I} E_i = \bigcup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i \in J} E_i$.

- Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{F}_i$ une famille génératrice de E_i . Alors la famille $\prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ engendre $\sum_{i=1}^n E_i$.

2. Somme directe de sous – espaces vectoriels

a. Définition et notation

Soient à nouveau E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E .

La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est dite **directe** lorsque tout élément x de $\sum_{i=1}^n E_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i$,

avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$. Lorsque la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe, on la note $\bigoplus_{i=1}^n E_i$.

b. Caractérisation des sommes directes

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev, et $E_1, \dots, E_n$ des sev de E . Les propositions suivantes sont équivalentes.

i – La somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe.

ii – Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$, $\sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$.

iii – Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\left(\sum_{i=1}^k E_i \right) \cap E_{k+1} = \{0\}$.

iv – Toute famille obtenue par concaténation d'une base de chacun des E_i , est une base de $\sum_{i=1}^n E_i$.

De plus, lorsque E est de dimension finie :

$$\text{La somme } \sum_{i=1}^n E_i \text{ est directe si et seulement si } \sum_{i=1}^n \dim(E_i) = \dim \sum_{i=1}^n E_i.$$

Définition (base adaptée à une décomposition en somme directe)

Il résulte de *iv* – que lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$, et lorsque, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i , la

famille $\mathcal{B} = \coprod_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ (concaténation des familles $\mathcal{B}_i$), est une base de E .

On dit que $\mathcal{B}$ est une **base adaptée à la décomposition de E en la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$** .

Remarque

Les E_i peuvent être d'intersections deux à deux toutes réduites à $\{0\}$, sans que leur somme soit directe : prendre par exemple trois droites vectorielles distinctes dans $\mathbb{R}^2 \dots$

3. Un cas particulier : sous – espaces supplémentaires dans un espace E

Soit E un espace vectoriel. On rappelle que :

Définition (sous – espaces supplémentaires dans E)

Deux sous – ev. F et G de E sont dit supplémentaires dans cet espace lorsque $F \oplus G = E$.

Proposition (caractérisations de la supplémentarité)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i – F et G sont supplémentaires dans E .

ii – $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

iii – Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

iv – Toute famille obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E .

De plus, si E est de dimension finie :

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \text{ si et seulement si } \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}.$$

Définition (base adaptée à un sous – espace vectoriel)

En particulier, lorsque F est un sous – espace vectoriel de E , toute famille obtenue par concaténation d'une base de F , et d'une base de l'un de ses supplémentaires dans E , est une base de E .

On dit qu'une telle base de E est **adaptée au sous – espace vectoriel F** .

Exemples

- Soit $n \in \mathbb{N}$; soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n + 1$. Notons $P\mathbb{K}[X]$ le sous – espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ constitué des polynômes divisibles par P . Alors, $P\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans E .
- L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n , et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques, sont deux sous – espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.
- Les applications paires et impaires forment deux sous – espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

III Applications linéaires

1. Image et noyau

Définitions (noyau, image d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de f , noté $\text{Ker}(f)$, est le sous – espace vectoriel de E défini par : $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$.

En pratique, on le détermine généralement grâce à la caractérisation suivante :

Soit $x \in E$. x est dans $\text{Ker}(f)$ si et seulement si $f(x) = 0$.

- L'**image** de f , notée $\text{Im}(f)$, est le sous – espace vectoriel de F défini par $\text{Im}(f) = f(E)$.

Par conséquent, pour tout $y \in F$: y est dans $\text{Im}(f)$ si et seulement si $\exists x \in E, y = f(x)$.

2. Retour sur les décompositions en somme directe

Proposition 1 (bijection induite par une application linéaire)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E . Alors

u réalise un isomorphisme de G dans $\text{Im}(u)$: $u|_G : \begin{cases} G \rightarrow \text{Im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ est un isomorphisme entre G et $\text{Im}(u)$.

Proposition 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et soient $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, u_i un élément de $\mathcal{L}(E_i, F)$.

Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, u|_{E_i} = u_i$.

Remarque

En particulier, étant donné, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, un endomorphisme u_i de E_i , il existe un unique endomorphisme u

de E tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, u|_{E_i} = u_i$.

Proposition 3 – définition (famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et soient $E_1, \dots, E_n$ des sous – espaces vectoriels de E tels

que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, p_i le projecteur d'image E_i et de noyau $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_j$. Alors :

i – pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, p_i^2 = p_i$.

ii – Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j, p_i \circ p_j = 0$.

iii – On a $\sum_{i=1}^n p_i = \text{Id}_E$.

On dit que $(p_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est la **famille de projecteurs associée à la décomposition** $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

3. Applications à l'interpolation

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, \dots, a_n$ $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Notons N le polynôme $N = \prod_{k=0}^n (X - a_k)$.

Soit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$. Alors

- $\text{Ker } \varphi$ est égal à $\mathbb{K}[X] \cdot N$ (le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes divisibles par N);
- φ définit un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ vers $\mathbb{K}^{n+1}$.

Ceci revient à dire que la restriction de u à $\mathbb{K}_n[X]$ au départ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire – définition (polynômes interpolateurs de Lagrange)

On considère à nouveau $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, posons $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$. Alors :

- Pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
- La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Pour tout $b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P_b à coefficients dans $\mathbb{K}$ et tel que

$$\begin{cases} \deg(P_b) \leq n \\ \forall i \in \{0, \dots, n\}, P_b(a_i) = b_i \end{cases} \quad \text{Ce polynôme est donné par } P_b = \sum_{i=0}^n b_i L_i.$$

Les polynômes L_i sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange* associés à la famille $(a_0, \dots, a_n)$.

Proposition (expression d'un polynôme dans une base de lagrange)

Soient $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$.

Soit $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$ associée à la famille $(a_0, \dots, a_n)$. Alors :

- Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X] : P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.
- En particulier, la somme des polynômes de Lagrange est égale au polynôme constant égal à 1 :

$$\sum_{i=0}^n L_i = 1.$$

Proposition (bases de Lagrange et matrices de Vandermonde)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, \dots, a_n$ $n + 1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soit $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ la base de Lagrange de

$\mathbb{K}_n[X]$ associée à la famille $(a_0, \dots, a_n)$, et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Alors :

- La matrice de passage de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{B}$ est la matrice de Vandermonde

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

- • Soit l'application $\psi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$. Alors :
 - La matrice de ψ relativement à la base $\mathcal{L}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ au départ, et à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ à l'arrivée, est la matrice identité I_{n+1} ;
 - ◦ La matrice de ψ relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ au départ, et à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ à l'arrivée, est la matrice de Vandermonde $M(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

4. Équations linéaires et formes linéaires

a. Principe de résolution d'une équation linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $b \in F$. On cherche à déterminer l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = b$.

Notons alors Γ_b l'ensemble des solutions de cette équation : $\Gamma_b = \{x \in E, f(x) = b\}$.

Proposition (structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire)

- Si $b \notin \text{Im}(f)$, alors $\Gamma_b = \emptyset$.
- Si $b \in \text{Im}(f)$, considérons un élément x_0 de E tel que $f(x_0) = b$. Alors Γ_b est le sous – ensemble de E donné par $\Gamma_b = x_0 + \text{Ker}(f) = \{x_0 + z, z \in \text{Ker}(f)\} = \{x \in E, \exists z \in \text{Ker}(f), x = x_0 + z\}$.

Remarque

- En particulier, $\Gamma_0 = \{x \in E, f(x) = 0\}$ est non vide, et égal à $\text{Ker}(f)$.
- On dit que la condition $b \in \text{Im}(f)$ est la condition de compatibilité de l'équation linéaire.

b. Formes linéaires, espace dual

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

Définition

- On appelle **forme linéaire sur E** toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.
 - (**Hors-programme**) : L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.
- On le note E^* , et on l'appelle **espace dual de E** .

Remarques

- Toute forme linéaire non nulle est de rang 1, et surjective.
- Si E est de dimension finie, il en est de même pour E^* , et l'on a $\dim(E^*) = \dim(E)$.

Exemples

- Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont les applications $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \sum_{k=1}^n a_k x_k \end{pmatrix}$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ fixés.
- Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie n , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , les formes linéaires sur E sont les applications $f : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{pmatrix}$, où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
- Soient a et b deux réels. Les fonctions $\delta_a : f \mapsto f(a)$, $I_{a,b} : f \mapsto \int_a^b f(t) dt$, $d_a : f \mapsto f'(a)$ sont des formes linéaires sur, respectivement, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- On suppose encore ici E de dimension finie n , et muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Les applications $\varphi_i : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{k=1}^n x_k e_k & \mapsto & x_i \end{pmatrix}$, qui à tout vecteur x associent sa composante suivant e_i relativement à la base $\mathcal{B}$, sont des formes linéaires sur E . On les appelle **formes linéaires coordonnées** dans la base $\mathcal{B}$ de E .

c. Hyperplans et formes linéaires

Soit à nouveau E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel.

Définition (hyperplans)

On appelle hyperplan de E tout sous – espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1 dans E .

Remarque :

Si E est de dimension n , les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

On prend souvent ceci comme définition des hyperplans en dimension finie.

Proposition 1 (les hyperplans sont les noyaux de formes linéaires non nulles)

Soit H un sous – ensemble de E . Alors, H est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire φ sur E , non nulle et telle que $\text{Ker } \varphi = H$.

Proposition 2 (les formes linéaires sont caractérisées, à constante multiplicative près, par leur noyau)

Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E , toutes deux non nulles.
Alors, φ et ψ ont même noyau si et seulement si elles sont colinéaires.

Proposition 3 (équations d'hyperplans)

On suppose que E est de dimension finie non nulle n , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit H un sous – ensemble de E . H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$H = \left\{ x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0 \right\}.$$

IV Changements de bases en dimension finie

1. Matrice des coordonnées d'un ou de vecteur(s) dans une base *Rappel*

a. Pour un vecteur

Définition (matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n , et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

On dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les **coordonnées**, ou **composantes**, de u dans la base $\mathcal{B}$, et que $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

b. Pour une famille de vecteurs

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Considérons une famille

$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de p vecteurs de E , et notons, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $[u_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \lambda_{2,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$ la matrice des

coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$. On appelle matrice des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est $[u_j]_{\mathcal{B}}$:

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_j & \dots & \dots & u_p \\ \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \dots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \dots & \lambda_{i,j} & \dots & \dots & \lambda_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & \dots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

c. Matrices de passage

Définition (matrices de passage, ou de changement de bases)

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de E .

On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, des coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On dit également que $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est la **matrice de changement de base** $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = [\mathcal{B}']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_j & \dots & \dots & \varepsilon_n \\ \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \dots & \lambda_{i,j} & \dots & \dots & \lambda_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & \dots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

où les $\lambda_{i,j}$ sont tels que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} e_i$.

d. Propriétés

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E . Alors :

- La matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible, et $(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.
- $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''}$.
- **Formule de changement de base pour les vecteurs**

Pour tout vecteur u de E : $[u]_{\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} [u]_{\mathcal{B}}$.

2. Matrice associée à une application linéaire relativement à des bases

a. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension p , F un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F .

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et l'on pourra noter $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$, la matrice des coordonnées de la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$. $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est donc la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & \dots & f(e_p) \\ \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \dots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \dots & \lambda_{i,j} & \dots & \dots & \lambda_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & \dots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix},$$

où pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} \varepsilon_i$.

Lorsque f est un endomorphisme de E , la matrice de f relativement à la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée sera simplement notée $M_{\mathcal{B}}(f)$ ou $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

b. Expression matricielle de l'image d'un vecteur

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ – espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{B}'$ une base de F , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F .

Proposition

Pour tout vecteur u de E , la matrice des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par :

$$[f(u)]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \times [u]_{\mathcal{B}}.$$

Corollaire (caractérisation matricielle du noyau et de l'image d'un morphisme)

- Soit $u \in E$. Notons X la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
Alors u appartient à $\text{Ker } f$ si et seulement si $A X = 0$.
- Soit p la dimension de F . Soit $v \in F$. Notons Y la matrice des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$.
Alors v appartient à $\text{Im } f$ si et seulement si il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $A X = Y$.

c. Compatibilité avec la composition, et conséquences

Proposition (matrice d'une composée)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{B}'$ une base de F , et $\mathcal{B}''$ une base de G . Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et pour tout $g \in \mathcal{L}(F, G)$:

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

Proposition (matrice d'un isomorphisme inverse)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{B}'$ une base de F , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

De plus lorsque tel est le cas : $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

En particulier, lorsque f est un automorphisme de E : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

Matrice d'une itérée d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la composée n fois de f avec lui-même : $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Par convention, $f^0 = \text{Id}_E$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_{\mathcal{B}}(f^n) = (M_{\mathcal{B}}(f))^n$.

3. Changement de base ; matrices semblables

a. Formule de changement de base pour les applications linéaires

Cas général

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F , et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors avec les notations habituelles : $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = (P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'})^{-1} \times M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Cas particulier essentiel

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , et f un endomorphisme de E .

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \times M_{\mathcal{B}}(f) \times P.$$

Remarque

On observera que lorsque E est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice de Id_E relativement à $\mathcal{B}$ au départ, et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée.

b. Matrices semblables

Définition

Soient A et B deux matrices carrées appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B sont dites semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ que $B = P^{-1} \times A \times P$.

Caractérisation

On déduit de la formule de changement de base que

deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement elles représentent le même endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n , relativement à deux bases éventuellement différentes.

Remarque

Deux matrices semblables ont même rang ; la réciproque est fausse.

5. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie

a. Trace d'une matrice carrée

Définition

La trace $\text{Tr}(M)$ d'une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients

$$\text{diagonaux : } \text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n m_{k,k}.$$

Proposition

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Alors, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Corollaire

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Si A et B sont semblables, alors elles ont même trace.

b. Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Définition (trace d'un endomorphisme en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. D'après ce qui précède, pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E , on a $\text{Tr}(M_{\mathcal{B}}(u)) = \text{Tr}(M_{\mathcal{B}'}(u))$.

On définit alors la trace de u par : $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(M_{\mathcal{B}}(u))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E .

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

- l'application trace : $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ M \mapsto \text{Tr}(M) \end{pmatrix}$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour tout $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension n , l'application trace : $\begin{pmatrix} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K} \\ u \mapsto \text{Tr}(u) \end{pmatrix}$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}(E)$.

Cas d'un projecteur

Soient E un ev de dimension finie, et p un projecteur de E . Alors la trace de p est égal à son rang : $\text{Tr } p = \text{rg}(p)$.

V Sous – espaces stables et réduction par blocs

1. Sous – espaces stables

a. La définition

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, F un sous – espace vectoriel de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que F est **stable par u** ou **u – stable** si et seulement si $u(F) \subset F$.

b. Premiers exemples

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par u .

2. Stabilité et réduction par blocs

a. Stabilité d'un sous-espace et trigonalisation par blocs

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous – espace vectoriel de dimension (finie) $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Soit maintenant $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , complétée en une base

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Alors : $F \text{ est } u\text{-stable} \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(p) & B(p, n-p) \\ O(n-p, p) & D(n-p) \end{pmatrix},$

i.e. : F est u – stable si, et seulement si, la matrice de u dans une base adaptée à F est triangulaire par blocs.

b. Stabilités simultanées d'une famille de s.e.v. et diagonalisation par blocs

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $E_1, \dots, E_p$

sous – espaces vectoriels de E , où $p \in \mathbb{N}^*$, tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, E_i \text{ est } u\text{-stable}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists \mathcal{B}_E \text{ base de } E \text{ adaptée à la décomposition } E = \bigoplus_{i=1}^p E_i \text{ telle que :}$$

$$M_{\mathcal{B}_E}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{D_p} \end{pmatrix},$$

i.e. : les E_i sont tous u – stables si, et seulement si, la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition spatiale $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ est diagonale par blocs. De plus, lorsque tel est le cas, la matrice de u dans toute base adaptée à cette décomposition spatiale est diagonale par blocs, de forme similaire.

3. Endomorphismes induits

a. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. , $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous – espace vectoriel de E u – stable.

L'application $u|_F : \begin{pmatrix} F \rightarrow F \\ x \mapsto u(x) \end{pmatrix}$ (restriction de u à F au départ et à l'arrivée) est bien définie.

On l'appelle **endomorphisme induit par u sur F** . On la notera dans ce chapitre u_F (notation non universelle).

b. Matrice d'un endomorphisme induit

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous – espace vectoriel de E u – stable de dimension $p \in \{1, \dots, n-1\}$, et u_F l'endomorphisme induit par u sur F . Soit d'autre part $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à F .

On sait que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p, p} & C \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$,

$B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Avec ces notations, A est la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$.

c. Cas d'une décomposition spatiale en somme directe de sous – espaces stables

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $E_1, \dots, E_p$ p

sous – espaces vectoriels de E , où $p \in \mathbb{N}^*$, stables par u , et tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, p_i la dimension de E_i , $\mathcal{B}_i$ une base de ce sous – espace, u_{E_i} l'endomorphisme induit

par u sur E_i , et $A_i = M_{\mathcal{B}_i}(u_{E_i}) \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ la matrice de u_{E_i} dans la base $\mathcal{B}_i$. Soit enfin $\mathcal{B} = \prod_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ la

base de E obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_i$. Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}.$$

d. Quand deux endomorphismes commutent...

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent, ie. que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

VI Polynômes d'endomorphismes ou de matrices

1. Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées

a. La définition

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose :

$$P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_p u^p.$$

De la même façon, étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_p A^p.$$

b. Quelques propriétés...

...Données sans leurs démonstrations, car celles – ci sont sans difficulté.

Propriété 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A, B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose A et B semblables.

Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Plus précisément, soit $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = Q^{-1} A Q$. Alors, $P(B) = Q^{-1} P(A) Q$.

Propriété 2

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Alors les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent, et l'on a :

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

On dispose évidemment du résultat analogue pour les matrices carrées.

2. Polynômes annulateurs

a. Définition

- On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul.
- De même, P est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $P(A)$ est la matrice nulle.

b. Un théorème d'existence

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et tel que $P(u) = 0$.

De la même façon, toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul.

Preuve

Considérons la famille d'applications $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$. Cette famille est composée de $n^2 + 1$ éléments

de $\mathcal{L}(E)$, et l'on sait que $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. Il en résulte cette famille est liée : il existe

$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$, non tous nuls et tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k u^k = 0$. Alors, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$ est

non nul, et l'on a $P(u) = 0$. La démonstration est analogue pour les matrices carrées. $\square$.

3. Application au calcul d'inverse ou de puissances de matrices carrées

a. Calculs d'inverses

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, et soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme annulateur de A .

Alors si a_0 est non nul, la matrice A est inversible, et l'on a :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^p a_k A^k.$$

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$$

b. Calculs de puissances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, et soit P un polynôme annulateur non nul de A .

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, R_k le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par P .

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = R_k(A)$.