

Remarque :

Le programme de colle est très chargé, surtout pour une semaine d'avant vacances. On sera donc indulgent, pour peu que le cours soit connu bien sûr.

Suites et séries de fonctions

I Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

1. Convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions
2. Convergence uniforme sur un domaine
3. Convergence normale d'une série de fonctions sur un intervalle
4. Lien entre ces trois notions

La convergence uniforme implique la convergence simple ; pour une série de fonctions, la convergence normale implique la convergence uniforme. Toute implication réciproque est fausse.

II Applications de la convergence uniforme

1. Convergence uniforme, et continuité de la limite d'une suite de fonctions continues.

(remarque : la convergence uniforme sur tout segment de I suffit). Version série de fonctions.

2. Interversion $\int$ / limite (suites de fonctions)

et intégration terme à terme sur un segment, pour les séries de fonctions.

3. Dérivation de la limite (pour les suites de fonctions)

et dérivation terme à terme, pour les séries de fonctions. Version C^p de ces résultats (*démonstration non exigible cette semaine*). Là aussi, s'il y a convergence uniforme sur tout segment, ça tourne encore.

4. Théorème de la double limite

Si une série de fonctions $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I , et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n

admet une limite finie ℓ_n en une borne a (éventuellement infinie) de I , alors la série $\sum_{n \geq 0} \ell_n$ converge, la somme de la

série $\sum f_n$ admet une limite en a , et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Intégration

0. Intégration sur un segment

Révisions de première année. Extension aux fonctions continues par morceaux.

I. Intégrales impropres

1. Notion d'intégrale généralisée
2. Propriétés

Invariance de nature par "changement de borne propre". Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Lorsque la fonction intégrée est continue, expression en termes de primitives. Relation de Chasles ; linéarité ; relation d'ordre.

3. Quelques intégrales de référence

Intégrales du type $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$; $\int_0^1 \ln t dt$; intégrales de Riemann.

4. Intégrations par parties et changements de variables

II. Fonctions intégrables sur un intervalle ; critères de convergence

1. Fonctions intégrables sur un intervalle

Définition ; notation $\int_I f$

2. Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

3. Convergence absolue et semi – convergence

La convergence absolue entraîne la convergence, la réciproque est fausse ; cas de l'intégrale de Dirichlet.

4. Quelques critères supplémentaires

Intégrales faussement impropres ; cas de fonctions bornées sur un intervalle borné.

III. Intégration terme à terme ; intégrales à paramètre

A – Convergence dominée et intégration terme à terme

1. Le théorème de convergence dominée

a. Version suites de fonctions

b. Version séries de fonctions

A utiliser lorsque le théorème d'intégration terme à terme qui va suivre en **2.** ne s'applique pas (*penser à des séries alternées non absolument convergentes*).

c. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

2. Théorème d'intégration terme à terme

B – Régularité d'une intégrale à paramètre

1. Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre

Version domination globale, version domination locale.

2. Théorème de dérivation sous le signe $\int$ (Leibniz).

Version C^1 , version C^1 avec domination locale, version C^p .

Prévisions pour la semaine d'après vacances : intégration, un peu d'algèbre linéaire.
--