

Réduction

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME OU D'UNE MATRICE CARRÉE

1. Éléments propres d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

a. Valeurs propres ; spectre

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On dit que λ est **valeur propre** de u si et seulement si $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) \neq \{0_E\}$.
- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u , et on le note $\text{Spec}(u)$ ou $\text{Sp}(u)$.

b. Vecteurs propres ; sous – espaces propres

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u .

- On appelle **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ tout vecteur x de E **non nul** et tel que $u(x) = \lambda x$.

Un vecteur x de E est donc vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$x \in \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) \setminus \{0_E\}.$$

- On appelle **sous – espace propre** de u associé à la valeur propre λ , et l'on note souvent $E_\lambda(u)$, le

sous – espace vectoriel de E défini par $E_\lambda(u) = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u) = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$.

c. Et on mélange le tout

Déterminer les **éléments propres**, ou **éléments de réduction**, de u , c'est déterminer ses valeurs propres et ses sous – espaces propres.

2. Premiers exemples

c. Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de cet espace est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de f .
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

a. Exemple 2

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la

base $\mathcal{B}$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de u .

b. Exemple 3

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n , et soit f un endomorphisme de E tel que

$$(3 \text{Id}_E - f) \circ (2 \text{Id}_E - f) \neq 0, (2 \text{Id}_E - f)^2 \neq 0 \text{ et } (3 \text{Id}_E - f) \circ (2 \text{Id}_E - f)^2 = 0.$$

1. Montrer que $\text{Ker}(3 \text{Id}_E - f) \oplus \text{Ker}((2 \text{Id}_E - f)^2) = E$.
2. Montrer que f admet 2 et 3 pour uniques valeurs propres.
3. Montrer que f n'est pas diagonalisable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

3. Propriétés des éléments propres d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

- Le scalaire λ est valeur propre de u ssi il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$.
- En dimension finie non nulle, λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0$.
- Dire que le scalaire λ est valeur propre de u signifie aussi que l'endomorphisme $\lambda \text{Id}_E - u$ est non injectif. Par conséquent, le sous-espace propre $E_\lambda(u) = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u)$ n'est jamais réduit au singleton $\{0_E\}$.
- En particulier, 0 est valeur propre de u si et seulement si u n'est pas injectif, et dans ce cas l'espace propre associé est le noyau de u : $E_0(u) = \text{Ker}(u)$.
- Si λ est valeur propre de u , l'espace $E_\lambda(u)$ est la réunion de l'ensemble des vecteurs propres associés à λ , et du singleton $\{0_E\}$.
- On suppose ici E de dimension finie n . Si λ est valeur propre de u , le théorème du rang donne :

$$\dim(E_\lambda(u)) = \dim(\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u)) = n - \text{rg}(\lambda \text{Id}_E - u).$$

- On suppose ici que λ est une valeur propre non nulle de u . Alors, pour tout $x \in E_\lambda(u) : u(x) = \lambda x$, ce qui permet d'écrire x comme image par u d'un élément de E , sous la forme $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$. Alors x appartient donc à $\text{Im}(u)$, et ceci prouve que : Si λ est une valeur propre non nulle de u , alors $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$.

4. Éléments propres d'une matrice carrée

Soit une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **valeur propre** de M tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I_n - M$ soit non inversible.

L'ensemble des valeurs propres de M est appelé **Spe** de M , et on le note **Spec**(M) ou **Sp**(M).

Soit λ une valeur propre de M .

- On appelle **vecteur propre** (ou *matrice colonne propre*) de M associé à la valeur propre λ toute matrice

colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nulle** et telle que $M X = \lambda X$.

Autrement dit, une matrice colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne propre de M associée à la valeur propre λ si et seulement si : $(\lambda I_n - M) X = 0_{n,1}$.

- On appelle **sous-espace propre** de M associé à la valeur propre λ , et l'on note $E_\lambda(M)$, l'ensemble :

$$E_\lambda(M) = \{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / M X = \lambda X \}.$$

On vérifie aisément que $E_\lambda(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Déterminer les **éléments propres** de M , c'est déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.

5. Liens entre éléments propres d'une matrice et d'un endomorphisme

Considérons un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, et un endomorphisme u de E .

a. Liens entre éléments propres d'une matrice et ceux de l'endomorphisme canoniquement associé

Proposition

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice M . Alors :

- Les valeurs propres de M sont les valeurs propres de u .
- Les vecteurs propres de M sont les matrices colonnes canoniquement associées aux vecteurs propres de u .

Démonstration

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'endomorphisme $\lambda \text{Id}_{\mathbb{K}^n} - u$ est canoniquement associé à la matrice $\lambda I_n - M$, et il est non injectif si et seulement si cette matrice est non inversible. Ceci prouve l'égalité du spectre de u et du spectre de M .
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. L'égalité $u(x) = \lambda x$ se traduit, dans la base canonique, par l'égalité matricielle $M X = \lambda X$. Ainsi, $x \in E_\lambda(u)$ si et seulement si $X \in E_\lambda(M)$, et le résultat s'en déduit.

b. Généralisation

La proposition suivante étend le résultat du paragraphe précédent, et se démontre de manière analogue.

Proposition

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ une base de E , u un endomorphisme de E , et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

- Les valeurs propres de u sont les valeurs propres de M .
- Les matrices colonnes propres de M sont les matrices colonnes des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs propres de u .

6. Propriétés des éléments propres d'une matrice

Les propriétés suivantes découlent de manière immédiate de l'identification, décrite dans le paragraphe précédent, entre les éléments propres d'une matrice carrée et ceux de l'endomorphisme canoniquement associé.

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) λ est valeur propre de M .
- ii) Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que $MX = \lambda X$.
- iii) Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que $(\lambda I_n - M)X = 0_{n,1}$.
- iv) L'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $\lambda I_n - M$ n'est pas injectif.
- v) L'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $\lambda I_n - M$ n'est pas bijectif.
- vi) La matrice $\lambda I_n - M$ n'est pas inversible.
- vii) $\text{rg}(\lambda I_n - M) < n$.
- viii) $\det(\lambda I_n - M) = 0$.

- Si λ est valeur propre de M : $\dim(E_\lambda(M)) = n - \text{rg}(M - \lambda I_n)$.

7. Diagonalisabilité

Soit n un entier naturel.

a. Matrice carrée diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n .

On dit que A est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

b. Endomorphisme diagonalisable

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et soit f un endomorphisme de E .

On dit que f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

c. Lien entre ces deux notions

- On considère à nouveau un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n , et un endomorphisme f de E .

Notons $\mathcal{B}$ une base de E , et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans cette base.

Dire que A est diagonalisable, c'est dire qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Notons alors $\mathcal{B}'$ la base de E telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ soit égale à P . D'après la formule de changement de base, dire que $D = P^{-1}AP$ est diagonale revient à dire que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ de E est diagonale, f est alors diagonalisable.

On en conclut que f est diagonalisable si et seulement si sa matrice A dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E est diagonalisable.

- Remarquons de plus que, que lorsque tel est le cas, la matrice A' de f relativement à n'importe quelle base de E est semblable à D , puisque D et A' représentent le même endomorphisme f dans deux bases de E . Ainsi, f est diagonalisable si et seulement si sa matrice relativement à toute base de E est diagonalisable.
- En particulier, étant donnée une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

La matrice M est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ (défini par

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), u(X) = MX$) canoniquement associé à M est diagonalisable.

8. Diagonalisabilité et base de vecteurs propres

- Soient encore un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension n , et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Supposons que A est la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Revenons alors à l'interprétation habituelle de la représentation matricielle d'un endomorphisme :

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_i) & \dots & f(e_n) \\ \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$, soit $(\lambda_i \text{Id} - f)(e_i) = 0$: donc e_i est un vecteur de $\text{Ker}(\lambda_i \text{Id}_E - f)$, évidemment non nul ; ainsi, λ_i est valeur propre de f , et e_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i .

- • Réciproquement, s'il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, tels que pour pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, λ_i est valeur propre de f , et e_i un vecteur propre de f associé à cette valeur propre, alors la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ est bien de la forme précédente. Par conséquent :

Proposition 1

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension finie n , et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit A la matrice de f dans cette base.

Alors A est une matrice diagonale si et seulement si tous les vecteurs e_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des vecteurs propres de f .

Proposition 1 bis

L'endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f , respectivement associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dans ce cas, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

- • • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En considérant l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à M , et en lui appliquant la proposition ci – dessus, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2

La matrice M est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de matrices colonnes propres de M , associées à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dans ce cas, en notant $P = (X_1 | X_2 | \dots | X_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $X_1, X_2, \dots, X_n$, et D la matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$: la matrice P est inversible, et l'on a $D = P^{-1} M P$.

II DIAGONALISATION

1. Base de vecteurs propres et diagonalisabilité

a. Pour les endomorphismes en dimension finie

Le résultat obtenu en 1.8. peut se réécrire de la façon suivante :

Proposition 1

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension finie n , et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit A la matrice de f dans cette base.

Alors A est une matrice diagonale si et seulement si tous les vecteurs e_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des vecteurs propres de f .

On en déduit que :

Proposition 2

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension finie.

Alors f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

b. Traductions matricielles

Proposition 3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de P . Alors la matrice $P^{-1} M P$ est diagonale si et seulement si toutes les matrices colonnes C_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des vecteurs propres de M .

Proposition 4

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice M est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de M .

Etudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie, ou d'une matrice carrée, revient donc à étudier l'existence d'une base de vecteurs propres. Le but des paragraphes suivants est de donner, en partant de cette constatation, une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

2. Théorème fondamental

a. Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Alors les sous – espaces propres de u sont en somme directe.

Preuve

Dire que les sous – espaces propres de u sont en somme directe revient à dire que toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Démontrons ce résultat par récurrence sur le cardinal d'une telle famille. On définit la propriété $\mathcal{P}$ par :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(p) \Leftrightarrow$ (toute famille de p vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes est libre).

Initialisation

Un vecteur propre est, par définition, non nul. Toute famille formée d'un unique vecteur propre est donc libre.

Hérédité

Supposons la propriété $\mathcal{P}(p)$ vérifiée pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, et considérons une famille

$\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_{p+1})$ de $p+1$ vecteurs propres de u , associés à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}$ deux

à deux distinctes. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que : $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k x_k = 0 \quad (\mathbf{1})$. En appliquant

$\lambda_{p+1} Id - u$ à cette relation, on obtient par linéarité

$$(\lambda_{p+1} Id - u) \left(\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k (\lambda_{p+1} Id - u)(x_k) = 0, \text{ soit, puisque les } x_k \text{ sont vecteurs}$$

propres de u associés respectivement aux λ_k : $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k (\lambda_{p+1} - \lambda_k) x_k = 0$.

Le coefficient de x_{p+1} dans cette combinaison linéaire est nul ; on a donc : $\sum_{k=1}^p \alpha_k (\lambda_{p+1} - \lambda_k) x_k = 0$.

L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$ assure alors que : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \alpha_k (\lambda_{p+1} - \lambda_k) = 0$. Comme les valeurs propres sont distinctes, $\lambda_{p+1} - \lambda_k$ est non nul. Par suite : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \alpha_k = 0$.

On a presque gagné : la relation $(\mathbf{1})$ s'écrit maintenant : $\alpha_{p+1} x_{p+1} = 0$; un vecteur propre étant, par

définition, non nul, on a forcément $\alpha_{p+1} = 0$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, p+1\}$, α_k est nul, et la famille $\mathcal{F}$ est libre. On conclut comme toujours avec le principe de récurrence. $\square$

Remarque

Lorsque $\mathcal{F}$ est une famille *infinie* de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes, il découle de la démonstration précédente que toute sous – famille *finie* de $\mathcal{F}$ est libre : la famille $\mathcal{F}$ est donc libre par définition.

Par suite, toute somme infinie de sous – espaces propres (deux à deux distincts) est libre.

On a naturellement la traduction matricielle de ce théorème :

Théorème

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les sous – espaces propres de M sont en somme directe.

b. Exemple

Considérons l'endomorphisme Φ de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par : $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \Phi(f) = f''$.

On observe que, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $f_a : x \mapsto \sin(ax)$ vérifie : $\Phi(f_a) = -a^2 f_a$.

$(f_a)_{a \in \mathbb{R}^{+*}}$ est une famille de vecteurs propres de Φ associés à des valeurs propres distinctes, c'est donc une famille libre.

3. Corollaires

a. Pour les endomorphismes en dimension quelconque

Proposition

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E , et $E_i, i \in I$, des sous – espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Soit, pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ une famille libre de vecteurs de E_i . Notons

$\mathcal{F} = \coprod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ la famille de vecteurs de E obtenue par concaténation des $\mathcal{F}_i$.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre.

En particulier :

Toute famille obtenue par concaténation de bases de sous – espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Preuve

C'est une conséquence immédiate du fait que les sous – espaces propres de f sont en somme directe.

b. En dimension finie

Théorème 1

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension finie n . Alors :

i – L'endomorphisme f admet au plus n valeurs propres : $\text{card}(\text{Spec}(f)) \leq n$.

ii – La somme des dimensions des sous – espaces propres de f est inférieure ou égale à n :

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq \dim(E).$$

Preuve

Les sous – espaces propres de f sont en somme directe, donc $\dim\left(\sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} E_\lambda(f)\right) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_\lambda(f))$,

d'où le résultat.

Théorème 2

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension finie n .

Alors, f est diagonalisable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i – $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E)$.

ii – $\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(f)} E_\lambda(f) = E$.

De plus, en cas de diagonalisabilité, toute famille obtenue par concaténation de bases de chacun des sous – espaces propres de f est une base de E , et la matrice de f dans cette base est diagonale.

Preuve

- L'équivalence *i* $\Leftrightarrow$ *ii* n'est pas un résultat neuf.
- Lorsque $\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(f)} E_\lambda(f) = E$, est une base de E . Cette base étant formée de vecteurs propres de f , la matrice de f dans cette base est diagonale... ce qui assure, évidemment, la diagonalisabilité de f .
- Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f . Alors, tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(f)} E_\lambda(f)$; par suite, $\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(f)} E_\lambda(f) = E$.

c. Traductions matricielles

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. et $E_1, \dots, E_p$ p sous – espaces propres de M associés à des valeurs propres distinctes. Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\mathcal{F}_i$ une famille libre de vecteurs de E_i .

Notons $\mathcal{F} = \coprod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ la famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_i$.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre.

En particulier :

Toute famille obtenu par concaténation de bases de sous – espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de M est libre.

Théorème 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

i – la matrice M admet au plus n valeurs propres : $\text{card}(\text{Spec}(M)) \leq n$.

ii – La somme des dimensions des sous – espaces propres de M est inférieure ou égale à n :

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(M)} \dim(E_\lambda(M)) \leq n.$$

Théorème 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M est diagonalisable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i – $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(M)} \dim(E_\lambda(M)) = n$.

ii – $\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(M)} E_\lambda(M) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

En cas de diagonalisabilité, toute famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ obtenue par concaténation de bases de chacun des sous – espaces propres de M est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. De plus, en notant $P = (X_1 | X_2 | \dots | X_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $X_1, X_2, \dots, X_n$, la matrice $P^{-1} M P$ est diagonale.

d. Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Lorsqu'une matrice est triangulaire, la détermination de ses valeurs propres est immédiate :

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de M sont les coefficients diagonaux de cette matrice.

Démonstration

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de la matrice M . Pour tout scalaire λ , la matrice $\lambda I_n - M$ est encore triangulaire, et ses éléments diagonaux sont $\lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_n$.

Or on sait qu'une matrice triangulaire est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, la matrice $\lambda I_n - M$ est non inversible si et seulement si l'un des coefficients $\lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_n$ est nul, donc si et seulement si il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda = \lambda_k$. C'est dire précisément que les valeurs propres de M sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

4. Spectre réel et spectre complexe d'une matrice carrée à coefficients réels

Considérons une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; cette matrice peut également être vue comme une matrice à coefficients complexes, et il se pose alors la question suivante : quels liens y a-t-il entre les éléments propres de M , considérée comme appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et ceux de cette même matrice, que l'on considère comme appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exemple

Considérons la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $T = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$; on a $QT = 2T$. Ceci prouve que 2 est

valeur propre *complexe* de M . En revanche, cet argument ne permet pas d'affirmer que 2 est valeur propre *réelle* de M , dans le sens où nous n'avons pas déterminé de vecteur propre à *coefficients réels* associé à 2.

Notations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Lorsqu'il y a ambiguïté, on note $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$ (respectivement $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(M)$) l'ensemble des valeurs propres complexes (respectivement réelles) de M .
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si λ est valeur propre (complexe) de M , on notera dans ce paragraphe $E_{\lambda, \mathbb{C}}(M)$ le sous-espace propre associé, et $\dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda, \mathbb{C}}(M))$ la dimension de ce $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Si le réel μ est valeur propre de M , on utilisera de même les notations $E_{\mu, \mathbb{R}}(M)$ et $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\mu, \mathbb{R}}(M))$.

Remarque

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\text{Spec}_{\mathbb{R}}(M) \subset \text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$.

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit λ un réel. Alors $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$ si et seulement si $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{R}}(M)$.

De plus, si λ est valeur propre de M : $\dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda, \mathbb{C}}(M)) = \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda, \mathbb{R}}(M))$.

Preuve :

Que l'on considère $\lambda I_n - M$ comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe, son rang reste le même.

Maintenant :

- on a $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{C}}(M) \Leftrightarrow \text{rg}(\lambda I_n - M) \neq n \Leftrightarrow \lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{R}}(M)$.
- Lorsque λ est valeur propre de M , le théorème du rang donne :

$$\dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda, \mathbb{C}}(M)) = n - \text{rg}(\lambda I_n - M) = \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda, \mathbb{R}}(M)),$$

ce qui achève la démonstration.

5. Éléments propres d'une matrice transposée

Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors :

- Les matrices M et M^T ont mêmes valeurs propres : $\text{Spec}(M) = \text{Spec}(M^T)$.
- De plus, les sous – espaces propres correspondants sont de même dimension :

$$\forall \lambda \in \text{Spec}(M), \dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_\lambda(M^T)).$$

Démonstration

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda I_n - M)^T = \lambda I_n^T - M^T = \lambda I_n - M^T$. Or on sait que toute matrice a même rang que sa transposée. On a donc : $\text{rg}(\lambda I_n - M^T) = \text{rg}((\lambda I_n - M)^T) = \text{rg}(\lambda I_n - M)$. On en déduit que

- La matrice $\lambda I_n - M^T$ est non inversible ssi $\lambda I_n - M$ est non inversible, d'où $\text{Spec}(M) = \text{Spec}(M^T)$.
- Pour tout $\lambda \in \text{Spec}(M)$:

$$\dim(E_\lambda(M)) = n - \text{rg}(\lambda I_n - M) = n - \text{rg}(\lambda I_n - M^T) = \dim(E_\lambda(M^T)).$$

Remarque

En revanche, les sous – espaces propres de M et de M^T sont en général différents : un vecteur propre de M n'a aucune raison d'être également vecteur propre de M^T , et réciproquement.

III Polynôme caractéristique

1. Définition

- Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel E de dimension finie non nulle.

Le polynôme caractéristique de u , noté χ_u , est défini par : $\chi_u = \det(X Id_E - u)$.

- De même, on définit le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \geq 1$) par :

$$\chi_M = \det(X I_n - M).$$

2. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, et d'une matrice associée

a. C'est la même chose

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – ev de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors : $\forall u \in \mathcal{L}(E), \chi_u = \chi_{M_{\mathcal{B}}(u)}$.

Preuve

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $M_{\mathcal{B}}(X Id_E - u) = X I_n - M_{\mathcal{B}}(u)$. On en déduit, par définition du déterminant d'un endomorphisme, que $\det(X Id_E - u) = \det(X I_n - M_{\mathcal{B}}(u))$ $\square$.

b. Polynômes caractéristiques de matrices semblables

Corollaire de la proposition précédente

Si deux matrices carrées sont semblables, alors elles ont même polynôme caractéristique.

Preuve

Si deux matrices carrées sont semblables, alors elles représentent le même endomorphisme (d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle). Leurs polynômes caractéristiques sont alors égaux à celui de cet endomorphisme.

3. Spectre, et racines du polynôme caractéristique

a. Un résultat essentiel

Théorème

En dimension finie (non nulle), les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.

Preuve

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie non nulle, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \in \text{Spec}(u) \Leftrightarrow \lambda \text{Id}_E - u \notin \text{GL}(E) \Leftrightarrow \det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0 \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0 \quad \square.$$

Traduction matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\text{Spec}_{\mathbb{K}}(M)$ est l'ensemble des racines dans $\mathbb{K}$ de χ_M .

b. Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement, $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n).

Soit λ une valeur propre de M (respectivement, de u).

Définition

On appelle multiplicité de la valeur propre λ , son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_M (respectivement, de χ_u).

On la note généralement $m(\lambda)$.

Remarque

On évitera, si possible, de parler, par exemple, de « valeur propre double » d'une matrice, car ça peut avoir plusieurs sens : valeur propre dont le sous – espace propre est de dimension 2, ou valeur propre dont la multiplicité est égale à 2. Ce n'est pas la même chose, comme l'illustre le résultat suivant :

Proposition (lien entre multiplicité d'une valeur propre, et dimension du sous – espace propre associé)

Soit $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{K}}(M)$ (respectivement, $\lambda \in \text{Spec}(u)$).

Alors, la dimension du sous – espace propre associé à λ est inférieure ou égale à la multiplicité de cette valeur propre.

Preuve reportée au paragraphe V.3., p.20.

c. Cas des valeurs propres simples

Proposition

Soit $\lambda \in \text{Spec}_{\mathbb{K}}(M)$ (respectivement, $\lambda \in \text{Spec}(u)$), une valeur propre de multiplicité 1.

Alors, la dimension du sous – espace propre associé à λ est égale à 1.

Preuve

Un espace propre n'étant jamais réduit à $\{0\}$, sa dimension est au moins égale à 1 ; d'un autre côté, elle est inférieure ou égale à $m(\lambda)$. Il en résulte que la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre simple est égale à 1.

4. Polynôme caractéristique d'une matrice transposée

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\chi_{M^T} = \chi_M$.

Preuve : $\chi_{M^T} = \det(X I_n - M^T) = \det((X I_n - M)^T) = \det(X I_n - M) = \chi_M \quad \square$.

5. Quelques coefficients du polynôme caractéristique

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- χ_M est de degré n et unitaire.
- Le coefficient de degré $n - 1$ de χ_M est égal à $-\text{Tr}(M)$.
- Le coefficient constant de χ_M est égal à $(-1)^n \det(M)$.

Preuve

Evident si l'on admet que toute matrice carrée complexe est semblable à une matrice triangulaire (ce que l'on prouvera en 7.c., p. 16).

Remarques

- De manière analogue, si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$:

$$\chi_u = X^n - \text{Tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On sait que χ_M est de degré n . Le nombre de ses racines, chacune d'entre elles étant comptée avec sa multiplicité, est donc inférieur ou égal à n . Or on sait que la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ est inférieure ou égale à $m(\lambda)$.

On retrouve ainsi le fait que M admet au plus n valeurs propres, et que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est inférieure ou égale à n .

Cas de la dimension 2

Le polynôme caractéristique d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est :

$$\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc).$$

6. Autour des polynômes caractéristiques scindés

a. Rappels

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On dit que P est **scindé** si et seulement toutes ses racines sont dans $\mathbb{K}[X]$.

Autrement dit

Un polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il peut s'écrire comme produit d'une constante, et de polynômes unitaires de degré 1.

Rappelons également le théorème de d'Alembert-Gauss :

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

b. Premières propriétés

Proposition

- i* – Toute matrice complexe d'ordre $n \geq 1$ admet au moins une valeur propre.
Il en est de même pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie non nulle.
- ii* – Toute matrice réelle d'ordre impair admet au moins une valeur propre. De même, tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.

Preuve

i – Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 1$. Le polynôme caractéristique de M est de degré n , et il est scindé sur $\mathbb{C}$.

Il admet donc au moins une racine, et celle-ci est valeur propre de M .

ii – Considérons maintenant une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec n impair. Le terme dominant de χ_M est X^n ;

on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \chi_M(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_M(x) = +\infty$. La fonction polynomiale $x \mapsto \chi_M(x)$ étant évidemment continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire qu'elle s'annule : χ_M possède (au moins) une racine réelle, par suite, M possède au moins une valeur propre.

c. Déterminant et trace lorsque le polynôme caractéristique est scindé

Propriété

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique de M est scindé.

En posant $\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, on a alors : $\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

On dispose des propriétés analogues pour un endomorphisme en dimension finie non nulle.

Autrement dit,

Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, la trace est la somme des valeurs propres et le déterminant leur produit, chacune d'entre elles étant comptée avec sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

Preuve

On a montré que le coefficient dominant de χ_M est 1. Comme on suppose ce polynôme scindé, on peut

effectivement l'écrire sous la forme $\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On a d'autre part l'expression partielle

$\chi_M = X^n - \text{Tr}(M)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M)$. En identifiant, on obtient les résultats souhaités.

Remarque

Lorsque χ_M est scindé, de la forme $\chi_M = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, on peut vérifier que

$$\chi_M = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \prod_{j=1}^{n-k} \lambda_{i_j} \right) X^k.$$

d. Cas d'un polynôme caractéristique scindé à racines simples

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. , soit u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n). On suppose que χ_M (resp. χ_u) est scindé, et que ses racines sont simples. Alors

- i – M (resp. u) possède exactement n valeurs propres.
- ii – M (resp. u) est diagonalisable.
- iii – Tous ses sous – espaces propres sont de dimension 1 .

Preuve

On a montré en 3.c. que, lorsqu'une valeur propre est simple, le sous – espace propre correspondant est de dimension 1 . Ici, le polynôme caractéristique admet n racines (simples) ; on a donc bien n valeurs propres, et tous les sous – espaces propres sont de dimension 1 . La somme de leurs dimensions étant égale à n , la matrice ou l'endomorphisme considéré est diagonalisable.

e. On généralise un peu

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n). Alors M (resp. u) est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i – χ_M (resp. χ_u) est scindé ;
- ii – $\forall \lambda \in \text{Spec}(M), \dim(E_\lambda(M)) = m(\lambda)$ (resp. $\forall \lambda \in \text{Spec}(u), \dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$).

7. Polynômes caractéristiques scindés et trigonalisation

a. La définition

Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

En dimension finie, un endomorphisme est dit **trigonalisable** si et seulement si il existe une base de l'espace dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Trigonalisabilité d'une matrice carrée

une matrice carrée est dite **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

b. Un critère de trigonalisabilité

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. de dimension finie $n \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Traduction matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, M est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Preuve (non exigible)

- Si M est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors, $\chi_M = \chi_T = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, qui est un polynôme scindé.

- Prouvons la réciproque par récurrence sur n . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{H}(n)$ par :

$\mathcal{H}(n) \Leftrightarrow$ (Toute matrice carrée d'ordre n dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable).

Initialisation

Pour $n = 1$, c'est pas trop dur.

Hérédité

Soit $n \geq 2$; supposons $\mathcal{H}(n-1)$, et considérons une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. Alors χ_M admet (au moins) une racine λ , qui est de ce fait valeur propre de M . Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé, $(X_2, \dots, X_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^{n-1}$ tel que $(X_1, \dots, X_n)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $(X_1, \dots, X_n)$. Alors, $P^{-1} M P$

est de la forme $U = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Dans ces conditions,

$\chi_M = \chi_U = (X - \lambda) \chi_A$, ce qui assure que χ_A est scindé. On applique alors l'hypothèse de récurrence : A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T ; notons $Q \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $T = Q^{-1} A Q$. La

matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & P \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & P^{-1} \end{pmatrix}$, et le calcul donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & P^{-1} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

(on a posé $(\beta_2 \cdots \beta_n) = (\alpha_2 \cdots \alpha_n) P$). M est semblable à U , U est semblable à la matrice

triangulaire $\begin{pmatrix} \lambda & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, donc M est trigonalisable. Ceci achève la récurrence.

c. Un corollaire évident

Théorème

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

Toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Aucune méthode générale de trigonalisation n'est exigible des étudiants, le programme est bien clair. Il est en revanche vivement conseillé de savoir trigonaliser une matrice carrée d'ordre 3 ou 4, le programme est tout aussi clair... cf exercices...

1. Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées

a. De quoi il s'agit

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose :

$$P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k = a_0 Id_E + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_p u^p.$$

De la même façon, étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_p A^p.$$

b. Quelques propriétés...

...Données sans leurs démonstrations, car celles – ci sont sans difficulté.

Propriété 1

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, u un endomorphisme de E , et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors,

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Propriété 2

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, u un endomorphisme de E , et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Alors, le noyau de l'endomorphisme $P(u)$ est stable par u .

Propriété 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A, B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose A et B semblables.

Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Plus précisément, soit $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = Q^{-1} A Q$. Alors, $P(B) = Q^{-1} P(A) Q$.

Propriété 4

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Alors pour toute valeur propre λ de u , $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

On dispose évidemment du résultat analogue pour les matrices carrées.

2. Polynômes annulateurs

a. Définition

- On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul.
- De même, P est un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $P(A)$ est la matrice nulle.

b. Un théorème d'existence

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et tel que $P(u) = 0$.

De la même façon, toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul.

Preuve

Considérons la famille d'applications $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$. Cette famille est composée de $n^2 + 1$ éléments de $\mathcal{L}(E)$, et l'on sait que $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. Il en résulte que cette famille est liée : il existe

$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$, non tous nuls et tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k u^k = 0$. Alors, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$ est

non nul, et l'on a $P(u) = 0$. La démonstration est analogue pour les matrices carrées. $\square$.

c. Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Alors le polynôme caractéristique de u est annulateur de u : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

De la même façon, pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

d. Spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée, et racines d'un polynôme annulateur

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et u un endomorphisme de E . Soit P un polynôme annulateur de u .

Alors, toute valeur propre de u est racine de P .

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de A , alors le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P .

Preuve

Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$, et soit $x \in E$ un vecteur propre associé à cette valeur propre.

On sait que $(P(u))(x) = P(\lambda) \cdot x$, la nullité de $P(u)$ entraîne donc celle de $P(\lambda) \cdot x$. Comme x est non nul (c'est un vecteur propre), il en résulte que $P(\lambda) = 0$.

e. Critère de l'annulateur scindé à racines simples

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Alors u est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur non nul, scindé et à racines simples.

De même, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est diagonalisable si et seulement si A admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, scindé et à racines simples.

Preuve

• Supposons u diagonalisable ; notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres, et posons $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.

Comme u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$.

Or pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, pour tout $x_i \in E_i$, $(P(u))(x_i) = (P(\lambda_i))(x_i) = 0$.

Il en résulte que $P(u) = 0$: P est évidemment non nul, et c'est un polynôme annulateur de u .

- Réciproquement, supposons que u admet un polynôme annulateur non nul, scindé à racines simples ;

notons – le P , et posons $P = a \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$.

Si $r = \deg(P)$ est nul, on a $a \text{Id} = 0$, donc $E = \{0\}$; u est alors évidemment diagonalisable.

Supposons désormais $r \geq 1$. Notons, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $E_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ (E_i est donc le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i , si c'en est effectivement une ; dans le cas contraire, $E_i = \{0\}$).

Pour montrer que u est diagonalisable, il suffit de prouver que $\bigoplus_{i=1}^r E_i = E$; on sait déjà que les E_i sont en

somme directe, il ne reste donc qu'à montrer que $\sum_{i=1}^r \dim E_i = \dim E$, ou encore : $\sum_{i=1}^r \dim E_i \geq \dim E$.

Lemme

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

preuve du lemme :

On applique le théorème du rang à $h = f|_{\text{Im } g}$; on obtient

$$\text{rg}(g) = \dim(\text{Ker}(h)) + \dim(\text{Im}(h)) = \dim(\text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f \circ g)),$$

d'où $\text{rg}(g) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f \circ g))$.

On en conclut grâce au théorème du rang que

$$\dim(E) - \dim(\text{Ker}(g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f \circ g)),$$

on a donc bien $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

preuve de l'inégalité $\sum_{i=1}^r \dim E_i \geq \dim E$:

En appliquant le lemme en cascade, on obtient :

$$\dim(\text{Ker}((f - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (f - \lambda_r \text{Id}))) \leq \sum_{i=1}^r \dim(\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})).$$

par hypothèse, $(f - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (f - \lambda_r \text{Id}) = 0$, donc

$$\dim(\text{Ker}((f - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (f - \lambda_r \text{Id}))) = \dim E, \text{ et l'on a bien } \sum_{i=1}^r \dim E_i \geq \dim E.$$

Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Alors u est diagonalisable si et seulement si le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Spec}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u .

De même, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in \text{Spec}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A .

f. Polynômes annulateurs et trigonalisation

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Alors u est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé.

De même, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est trigonalisable si et seulement si A admet un polynôme annulateur scindé.

V Réduction et endomorphismes induits

1. Une remarque préliminaire

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

i – Les sous – espaces propres de u sont stables par u .

ii – Une droite vectorielle est stable par u si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de cet endomorphisme.

2. Matrice et polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Proposition (rappel)

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous – espace vectoriel de E u – stable de dimension $p \in \{1, \dots, n-1\}$, et u_F l'endomorphisme induit par u sur F .

Soit d'autre part $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

de E adaptée à F . On sait que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$,

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Avec ces notations, A est la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$.

Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous – espace vectoriel de E u – stable de dimension $p \in \{1, \dots, n-1\}$, et u_F l'endomorphisme induit par u sur F .

Alors, le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u .

Preuve

Avec les notations de la proposition précédente :

$$\begin{aligned}\chi_u &= \det(X \cdot I_n - M_{\mathcal{B}}(u)) = \det\left(\begin{pmatrix} X \cdot I_p - A & -B \\ 0_{n-p,p} & X \cdot I_{n-p} - C \end{pmatrix}\right) \\ &= \det(X \cdot I_p - A) \cdot \det(X \cdot I_{n-p} - C) = \det(X \cdot I_p - M_{\mathcal{B}_F}(u_F)) \cdot \det(X \cdot I_{n-p} - C) \\ &= \chi_{u_F} \cdot \det(X \cdot I_{n-p} - C) \quad \square.\end{aligned}$$

Remarque

En particulier, $\chi_u(0) = \chi_{u_F}(0) \cdot (-1)^{n-p} \det(C)$, soit : $\det(u) = \det(u_F) \cdot \det(C)$.

3. Multiplicité d'une valeur propre, et dimension du sous – espace propre associé : le retour

La preuve de la proposition suivante (III.3.b.) avait été écartée pour un temps. Voici venu le moment de la démontrer.

Proposition (lien entre multiplicité d'une valeur propre, et dimension du sous – espace propre associé)

Soit $\lambda \in \text{Spec } \mathbb{K} (M)$ (respectivement, $\lambda \in \text{Spec } (u)$).

Alors, la dimension du sous – espace propre associé à λ est inférieure ou égale à la multiplicité de cette valeur propre.

Preuve : notons p la dimension de $E_\lambda (u)$. $E_\lambda (u)$ est stable par u ; l'endomorphisme induit $u_{E_\lambda (u)}$ a donc un sens. De plus, il est égal à $\lambda \text{Id}_{E_\lambda (u)}$, et par suite son polynôme caractéristique est $(X - \lambda)^p$. Donc, $(X - \lambda)^p$ divise χ_u , ce qui entraîne l'inégalité $p \leq m(\lambda)$. $\square$.

4. Cas d'une décomposition spatiale en somme directe de sous – espaces stables

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $E_1, \dots, E_p$ p

sous – espaces vectoriels de E , où $p \in \mathbb{N}^*$, stables par u , et tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, p_i la dimension de E_i , $\mathcal{B}_i$ une base de ce sous – espace, u_{E_i} l'endomorphisme induit par u sur E_i , et $A_i = M_{\mathcal{B}_i}(u_{E_i}) \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ la matrice de u_{E_i} dans la base $\mathcal{B}_i$. Soit enfin $\mathcal{B} = \prod_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ la base de E obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_i$.

Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}.$$

Preuve : on a déjà vu ce résultat.

Corollaire

Avec les notations de la proposition précédente, et sous les mêmes hypothèses : $\chi_u = \prod_{i=1}^p \chi_{u_{E_i}}$.

En particulier, $\det(u) = \prod_{i=1}^p \det(u_{E_i})$.

5. Sous – espaces stables et diagonalisation

a. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – e.v. de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous – espace vectoriel de E u – stable, et u_F l'endomorphisme induit par u sur F .
Alors si u est diagonalisable, u_F l'est aussi.

b. Diagonalisabilité et décomposition spatiale en somme directe de sous – espaces stables

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $E_1, \dots, E_p$ p sous – espaces vectoriels de E , où $p \in \mathbb{N}^*$, stables par u , et tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Soit, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, u_{E_i} l'endomorphisme induit par u sur E_i .

Alors : u est diagonalisable si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, u_{E_i} est diagonalisable.

Preuve : si u est diagonalisable, d'après la proposition précédente, les u_{E_i} , $i \in \{1, \dots, p\}$, le sont aussi.

Réciproquement, supposons que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, u_{E_i} est diagonalisable. Soit, pour tout $i \in 1, p$, $\mathcal{B}_i$ une base de E_i dans laquelle la matrice de u_{E_i} est une matrice diagonale D_i .

Alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \coprod_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ de E est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_p \end{pmatrix}$. $\square$

6. Endomorphismes commutant et co - diagonalisabilité

a. Stabilité de certains sous - espaces (rappel)

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent, ie.

On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Alors

- i - $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v ;
- ii - tout sous - espace propre de u est stable par v .

Preuve

- i - • Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \text{Ker}(u)$:

$\text{Ker}(u)$ est stable par v .

- Soit $y \in \text{Im}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a

$$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}(u),$$

d'où la stabilité de $\text{Im}(u)$ par v .

- ii - • Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$. v commute avec u , donc également avec $u - \lambda \text{Id}_E$.

Par suite, d'après i -, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = E_\lambda(u)$ est stable par v . $\square$

b. Co - diagonalisabilité

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ - e.v. de dimension finie, u, v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent, et que u et v sont tous deux diagonalisables.

Alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

Traduction matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A, B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commutent, et sont toutes deux diagonalisables.

Alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

Preuve : l'endomorphisme u étant diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(u)} E_\lambda(u)$. Comme u et v commutent, chacun

des sous – espaces propres de u est stable par v . Pour tout $\lambda \in \text{Spec}(u)$, l'endomorphisme v_{E_λ} induit par v sur E_λ est bien défini, et il est diagonalisable puisque v l'est (cf. la proposition du **5.a**).

Notons, pour tout $\lambda \in \text{Spec}(u)$, $\mathcal{B}_\lambda$ une base de E_λ dans laquelle la matrice de v_{E_λ} est diagonale. Alors $\mathcal{B} = \coprod_{\lambda \in \text{Spec}(u)} \mathcal{B}_\lambda$, est une base de E , et les matrices de u et v dans cette base sont toutes deux diagonales. $\square$