



2025-2026

PC

Liste d'exercices

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Réduction

Exercice 1

Diagonaliser sur $\mathbb{C}$ (lorsque c'est possible) les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & -b \\ b & -b & 2a - b \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -6 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la

base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f admet une valeur propre unique, à déterminer.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n .

Exercice 4

Valeurs propres, sous-espaces propres des endomorphismes Φ et Ψ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définis par

$$\Phi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \Psi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $A = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Diagonaliser J et A .

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de la matrice A , et la diagonaliser.

II – Applications relativement directes de la réduction

Exercice 7

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$, A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que le plan vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $\mathcal{P} : ax + by + cz = 0$ est u -stable si et seulement si

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est une matrice colonne propre de la matrice ${}^t A$.

On pourra considérer la forme linéaire $\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & ax + by + cz \end{pmatrix}$.

Application :

Déterminer tous les sous – espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la

matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$

et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2y + z - t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous – espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Sont – ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Construire un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que $F = \text{Ker}(f)$ et $G = \text{Im}(f)$.
3. L'endomorphisme f est – il diagonalisable ?

Exercice 9

Les matrices suivantes sont – elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Déterminer T^n en fonction de n .

5. En déduire A^n en fonction de n .

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Déterminer $\text{Sp}(A)$. Expliquer, sans calculs, pourquoi A n'est pas diagonalisable.

Déterminer ensuite $E_2(A)$.

2. Déterminer trois vecteurs u, v, w tels que :

$$f(w) = 2w, \quad f(v) = w + 2v \quad \text{et} \quad f(u) = v + 2u.$$

3. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

En déduire une matrice triangulaire supérieure B semblable à A .

4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $M = P D P^{-1}$

2. Soient les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et

$$\text{par la relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 4u_n + v_n + 5w_n \end{cases}$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose : } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Y_n = P^{-1} X_n.$$

Déterminer Y_n en fonction de n et de Y_0 . En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0 et w_0 .

Exercice 13

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

de cet espace, est $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u .

b. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u admet pour matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On choisira les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3 dans la base canonique parmi les nombres 1, 0 et -1 .

2. Etant données trois fonctions réelles f_1, f_2 et f_3 de la variable réelle x , dérivables sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$V(x) = f_1(x) \cdot e_1 + f_2(x) \cdot e_2 + f_3(x) \cdot e_3$$

$$V'(x) = f_1'(x) \cdot e_1 + f_2'(x) \cdot e_2 + f_3'(x) \cdot e_3$$

a. Déterminer les coordonnées $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ de $V(x)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) .

Démontrer que l'on a : $V'(x) = g_1'(x) \cdot v_1 + g_2'(x) \cdot v_2 + g_3'(x) \cdot v_3$.

b. Utiliser les résultats précédents pour déterminer les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} f_1'(x) = 8f_1(x) - f_2(x) - 5f_3(x) \\ f_2'(x) = -2f_1(x) + 3f_2(x) + f_3(x) \\ f_3'(x) = 4f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) \end{cases}.$$

Exercice 14

Etude d'une suite récurrente matricielle « arithmético – géométrique »

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, où x, y , et z sont des réels.

On définit alors une suite de matrices colonnes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}.$$

1. Montrer que $0, \frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de A , et préciser des vecteurs propres u, v , et w

qui leur sont respectivement associés.

Justifier de deux manières différentes la diagonalisabilité de la matrice A .

2. Justifier les affirmations suivantes :

- Il existe un unique triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tel que $B = \alpha u + \beta v + \gamma w$;
- Pour tout entier naturel n , il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$.

3. Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \frac{\beta_0 - 2\beta}{2^n} + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$.

4.a. Prouver que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si le réel γ introduit à la question 2. est nul.

b. En déduire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi $3x - 4y + 12z = 0$.

5. On dit que le couple (A, B) admet une position d'équilibre stable lorsque la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite quelle que soit la valeur de X_0 .

Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de B , le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable.

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont simples.

On désignera dans la suite par D une matrice diagonale semblable à A , et par P la matrice de passage de A à D .

2. Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $YD = DY$. Montrer que la matrice Y est diagonale.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose, avec les notations de 1., $Y = P^{-1}XP$

Montrer que $XA = AX$ si et seulement si $YD = DY$.

4. On appelle **commutant** de A l'ensemble $C(A)$ des matrices commutant avec A .

a. Montrer que $C(A)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et préciser sa dimension.

b. Montrer que $C(A) = \text{Vect} \langle (I_3, A, A^2) \rangle$.

Exercice 16

On considère la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres complexes de la matrice A , ainsi que les espaces propres correspondants.

On cherche désormais les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$ (1)

2. Soit M une solution de l'équation (1).

Montrer que M admet les mêmes espaces propres que A .

Déterminer les valeurs propres possibles de la matrice M .

3. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de (1).

4. En déduire les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de (1).

Exercice 17

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Déterminer une base de $\text{Im } f$ et une base de $\text{Ker } f$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, et déterminer P^{-1} .

3.a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

b. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D telle que $A = P D P^{-1}$.

4. On s'intéresse ici à la résolution de l'équation $M^3 = A$ (*), où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si M vérifie la relation (*), alors A et M commutent.

b. On note $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si la matrice M vérifie la relation (*), déduire de la question précédente que X_1 , X_2 , et X_3 sont des vecteurs propres de M .

c. En déduire l'existence d'une matrice $\Delta \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P \Delta P^{-1}$.

Quelle relation a-t-on entre les matrices Δ et D ? Conclure.

Exercice 18

Pour tout n entier non nul, on considère la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

1.a. Montrer sans calculs que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont les seules valeurs propres de A_n .

1.b. La matrice A_n est-elle diagonalisable? Inversible?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la matrice produit : $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$.

La matrice B_n est-elle diagonalisable? Inversible? Si oui, déterminer B_n^{-1} .

Exercice 19

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour p entier tel que $0 \leq p < n$, on note $A_p = \left(a(p)_{i,j} \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\text{donnée par : } \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a(p)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j - i = p \\ 1 & \text{si } i - j = n - p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la matrice A_0 .
2. Montrer que pour tout p tel que $0 \leq p < n$: $(A_1)^p = A_p$.
3. Déterminer les éléments propres de la matrice A_1 . Cette matrice est-elle diagonalisable ?
4. En déduire les éléments propres de la matrice A_p .
5. On suppose ici $n = 3$, et on note $T = A_0 + A_1$. Déterminer T^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

Exercice 20

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} = i, \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1.$$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $s = \sum_{k=1}^n x_k$. Montrer que :

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} s = \lambda x_1 \\ s = (\lambda - 1)x_2 \\ \vdots \\ s = (\lambda - n + 1)x_n \end{cases}.$$

3. Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$.
4. Etablir la réciproque de la question précédente.
5. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes.

Polynômes annulateurs

Exercice 21

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini, dans la base canonique de cet espace, par la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer u^3 . En déduire les valeurs propres de u .

2. Montrer que U est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A, B \in E$ fixées et non nulles, on définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall M \in E, f(M) = M + \text{Tr}(AM)B.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de f et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que f soit diagonalisable. Quels sont alors les éléments propres de f ?
2. Déterminer $\dim(C)$, où $C = \{g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g\}$.

Exercice 23

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E vérifiant $f^3 - f^2 + f - \text{Id}_E = 0$.

1. Que dire des valeurs propres de f ? On distinguera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. f est-il inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 24

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Spec}(f) = \{2, 3, 4\}$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(f) = 0$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe trois réels a_n, b_n, c_n (que l'on déterminera) tels que $X^n - (a_n X^2 + b_n X + c_n)$ soit divisible par $X^3 - 9X^2 + 26X - 24$.
3. En déduire l'expression de f^n en fonction de f , de f^2 et de n .

Exercice 25

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, et $P = (X - \lambda)Q$. On suppose que :

- P est un polynôme annulateur de f ;
- Q n'est pas un polynôme annulateur de f .

Montrer que λ est une valeur propre de f .

Exercice 26

Soit a un réel non nul. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & & & a^n \\ \frac{1}{a} & 1 & a & & & a^{n-1} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{a} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & a \\ \frac{1}{a^n} & \frac{1}{a^{n-1}} & \frac{1}{a^{n-2}} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A , aussi simple que possible.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A .
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 27

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E .

1. Rappeler pourquoi il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(f) = 0$.
2. On suppose dans cette question que f est diagonalisable.
 - a. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E .
 - b. Montrer plus généralement que pour tout scalaire λ :
 $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - \lambda \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
3. On suppose dans cette question que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$
 et $\text{Im}(f - \lambda \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
 - a. Montrer que pour tout scalaire λ et pour tout $p \geq 1$: $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)^p = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$.
 - b. Montrer qu'il existe un polynôme à racines simples $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(f) = 0$, et en déduire que f est diagonalisable.

Exercice 28

Réduction des matrices de rang 1

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe deux familles de scalaires $(a_i)_{i \in [1,n]}$ et $(b_j)_{j \in [1,n]}$ telles que : $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $m_{i,j} = a_i b_j$.

En déduire l'existence d'une matrice colonne $C = (C_i)_{i \in [1,n]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et d'une matrice

ligne $L = (L_j)_{j \in [1,n]} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, toutes deux à déterminer, telles que $M = C \cdot L$.

2. Montrer que : $M^2 = (\text{Tr } M) M$.
- 3.a. Déterminer les valeurs propres de M .
 - b. Etudier la diagonalisabilité de M . On distinguera deux cas, selon que $\text{Tr } M = 0$ ou $\text{Tr } M \neq 0$.

Exercice 29

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$, où $u^3 = u \circ u \circ u$.

1. Montrer que $\text{Im}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \subset \text{Ker}(u)$, où $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ possède au moins une valeur propre réelle.
 Vérifier que $\text{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$ et $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \mathbb{R}^3$.

4. En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 30

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice annulée par $X^3 - 3X + 4$. Que dire du signe de $\det(A)$?

Exercice 31

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 - 5A + 6I_n = O_n$.

Soit alors $\Phi_A : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM + MA \end{pmatrix}$.

Déterminer les éléments (valeurs et vecteurs) propres de Φ_A .

L'endomorphisme Φ_A est-il diagonalisable ?

Par blocs

Exercice 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} A & O_n \\ A & A \end{pmatrix}$.

Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = O_n$.

Exercice 33

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non injectif de E . Etablir l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i) $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = E$.

ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E relativement à laquelle la matrice de u est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_p & O_p \\ O_p & O_p \end{pmatrix}, \text{ avec } A_p \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R}).$$

iii) $\exists P \in \mathbb{R}[X] / (P(0) = 0, P'(0) \neq 0 \text{ et } P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)})$.

Exercice 34

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ (matrice par blocs). Montrer que M est diagonalisable si et seulement si AB est diagonalisable et $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = \text{rang}(AB)$.

Opérateurs fonctionnels ; espaces de polynômes, de suites

Exercice 35

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et admettant une limite finie en $+\infty$. Soit Φ

l'endomorphisme de E défini par : $\Phi : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & \Phi(f) \end{pmatrix}$, où : $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = f(x+1)$.

Déterminer les éléments (valeurs et vecteurs) propres de Φ .

Exercice 36

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on définit l'application $T(f)$ sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt & \text{si } x \neq 0 \\ * & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Soit $T : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & T(f) \end{pmatrix}$. Déterminer $*$ de sorte que T soit un endomorphisme de E .

2. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de T .

Exercice 37

Soit n un entier supérieur ou égal à 3, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , et b un réel. Soit $\varphi : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & \varphi(P) \end{pmatrix}$, où : $\varphi(P)(X) = (X - b)(P'(X) + P'(b)) - 2(P(X) - P(b))$, et où P' désigne le polynôme dérivé du polynôme P .

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer le plus grand entier k vérifiant : $\forall P \in E, \exists Q \in E, \varphi(P) = (X - b)^k Q(X)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de φ .
4. Pour $k \geq 3$, déterminer $\varphi(P)$ lorsque $P = (X - b)^k$.

L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 38

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, (f(u))_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f .

Co - réduction

Exercice 39

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout espace propre de f est stable par g .
 2. En déduire que f et g possèdent un vecteur propre commun.
-

Exercice 40

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est diagonalisable.
 2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et une matrice diagonale D telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$.
 3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $g \circ g = f$.
 - a. Montrer que g et f commutent.
 - b. En déduire que la matrice Δ de g dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
 4. Déterminer les endomorphismes $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g \circ g = f$, en donnant leur matrice dans la base canonique.
-

Exercice 41

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par J dans la base canonique

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.

Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

On considère une base $C = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f .

2. On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, et on suppose qu'il vérifie l'égalité $g \circ g = f$.

Montrer que l'on a $g \circ f = f \circ g$, puis que g est diagonalisable dans la base C .

3. Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = J$?

Expliquer comment trouver une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant : $M^2 = J$.

Exercice 42

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et u, v deux endomorphismes de E .

1. On suppose que $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer que u est nilpotent.

2. On suppose que $u \circ v - v \circ u = au + bc$, où $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 43

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation $M^2 - 6M + I_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Miscellaneous

Exercice 44

Soit $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), A^3 = I_4\}$. Déterminer $\{\det(A + I_4), A \in \mathcal{E}\}$.

Exercice 45

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(f_k)_{k \in [1, n]}$ des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ vérifiant :

•
$$\sum_{k=1}^n f_k = Id_{\mathbb{C}^n}.$$

••
$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}.$$

Soit $(a_k)_{k \in [1, n]}$ n nombres complexes distincts, et $f = \sum_{k=1}^n a_k f_k$.

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer f^p .

2. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 46

Soit $n \geq 3$, $\theta = \frac{2\pi}{n}$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $\forall (i, j) \in [1, n]^2, a_{i,j} = \cos((i+j)\theta)$.

1. Justifier que
$$A = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & \dots & \omega^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\omega} \\ \overline{\omega}^2 \\ \vdots \\ \overline{\omega}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\omega} & \overline{\omega}^2 & \dots & \overline{\omega}^n \end{pmatrix} \right], \text{ où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

2. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

3. En déduire $\det(A + I_n)$.

Exercice 47

Soit $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, telles que : $A B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

On note f (resp. g) l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ (resp., de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$) canoniquement associé à A (resp. à B).

1. Déterminer les valeurs propres de $A B$, ainsi que la dimension de ses sous – espaces propres.
2. Montrer que f est injective, et que g est surjective.
3. Dédire de ce qui précède que $B A = 9 I_2$.

Exercice 48

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et u un endomorphisme de E . Montrer que E contient un sous – espace vectoriel stable par u et de dimension 1 ou 2.

Exercice 49

Théorèmes de Gerschgorin et Hadamard

1. Soient $n \geq 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in [1, n], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

On pourra raisonner par l'absurde et considérer une matrice colonne X non nulle telle que $A X = 0_{n,1}$.

2. Soit $n \geq 2$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de B . Montrer que $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n D \left(a_{i,i}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \right)$,

où pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, $D(\alpha, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z - \alpha| \leq R\}$.

3. Soient $n \geq 2$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que si λ est une valeur propre réelle de B , alors $|\lambda| \leq 2$.

On pose alors $\lambda = 2 \cos \theta$, avec $\theta \in [0, \pi]$.

- b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice B .

Exercice 50

Une matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** lorsqu'elle vérifie les propriétés suivantes :

$$i - \quad \forall (i, j) \in [1, n]^2, m_{i,j} \geq 0 ;$$

$$ii - \quad \forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1 .$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que $C = A B$ est une matrice stochastique.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de A .
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, ie telle que : $\forall i \in [1, n], \left| \sum_{j \neq i} m_{i,j} \right| < |m_{i,i}|$

Montrer que M est inversible.

On pourra considérer $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M X = 0$, ainsi qu'un coefficient x_k de la matrice colonne X de valeur absolue maximale, i.e. tel que : $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, et prouver, en considérant le $k^{\text{ième}}$ coefficient de $M X$, que $x_k = 0$.

4. On revient à notre matrice stochastique A . Montrer que si λ est une valeur propre (complexe) de A , alors $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 51

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$. Prouver l'équivalence des conditions suivantes :

1. M est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $M^m = 0$.
2. 0 est la seule valeur propre de M .
3. Le polynôme caractéristique χ_M de M est $(-1)^n X^n$.
4. $M^n = 0$.
5. Pour tout entier $k \geq 1$, on a $\text{Tr}(M^k) = 0$.
6. Pour tout entier $k \in [1, n]$, on a $\text{Tr}(M^k) = 0$.

Exercice 52

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et p un entier supérieur ou égal à 2.

Soit u un endomorphisme de E tel que u^p soit diagonalisable.

Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\ker(u) = \ker(u^p)$.

Exercice 53

Soit $T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$.

Déterminer les éléments propres de T .

Exercice 54

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = n \\ j & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 55

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C \neq 0_n$ et $AC = CB$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $A^k C = C B^k$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)C = C P(B)$.
3. En déduire que A et B ont une valeur propre en commun.

Exercice 56

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que son polynôme caractéristique vérifie : $\chi_u(X^2) = \chi_u(X) \chi_u(X-1)$.

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ stables par u .

Exercice 57

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le commutant de A par $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$.

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\dim(C(A)) \geq n$, et chercher les cas d'égalité.

Exercice 58

Pour $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles, on pose $A = I_n + CL$.

1. Déterminer le rang de CL .
 2. Montrer que $\det(A) = 1 + LC$.
 3. Exprimer A^2 en fonction de I_n , CL et LC .
 4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de A , et donner son inverse lorsqu'il existe.
-

Exercice 59

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et admettant n valeurs propres distinctes. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A .
 2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
-

Exercice 60

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P .

1. Montrer que si P admet n racines distinctes, alors A et B sont semblables.
 2. Donner deux matrices ayant le même polynôme caractéristique et qui ne sont pas semblables.
-

Exercice 61

1. Soit $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid E \text{ est vecteur propre de } M\}$ est un sous-espace

vectorel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donner sa dimension.

2. Même question avec une autre colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.
-

Exercice 62

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

1. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de A^2 , de degré $p \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de P comptées avec leur multiplicité. On pose $Q = P(X^2)$. Que peut-on dire de Q ? Exprimer Q sous forme de produit de facteurs irréductibles.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.