



Problème (d'après Centrale I PC 2007)

Partie I

Q1 1.a. La fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.b. La fonction $x \mapsto x f(x)$ est impaire, donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle: $m_1 = 0$

1.c. Intégrons par parties sur un segment $[-a, a]$:

$$\int_{-a}^a x^{n-1} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-a}^a + \int_{-a}^a (n-1) x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, et en divisant par $\sqrt{2\pi}$, il vient: $m_n = (n-1)m_{n-2}$.

Partant de $m_0 = 1$, on obtient: $m_{2n} = (2n-1)(2n-3)\dots 3.1$.

Et partant de $m_1 = 0$, $m_{2n+1} = 0$.

$$m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad m_{2n+1} = 0$$

Q2 La fonction $x \mapsto e^{-tx} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$-\frac{x^2}{2} - tx = -\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}t^2, \text{ d'où } \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2} dx.$$

Le changement de variable $u = x + t$ donne: $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = e^{\frac{t^2}{2}}$

Q3 3.a. D'après le développement en série de la fonction exponentielle:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = e^{-tx} f(x)$$

$$\mathbf{3.b.} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, |S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|tx|^k}{k!} f(x) \leq e^{|tx|} f(x)$$

La fonction $x \mapsto e^{|tx|} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc cette hypothèse de domination, jointe à la convergence simple du **3.a.**, nous donne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} S_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx$$

Mais comme $\int_{\mathbb{R}} S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx$ par linéarité de l'intégrale,

$$\text{l'égalité ci-dessus se récrit: } \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} m_k$$

3.c. en remplaçant m_k par sa valeur obtenue en **1.c.**, il vient:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^k = e^{\frac{t^2}{2}}$$

On retrouve bien le résultat de **Q2**.

Partie II

Q4 E est une partie du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non vide (elle contient la fonction nulle).

Soit $(g, h) \in E^2$ et $p \in \mathbb{R}$. Montrons que $g + ph \in E$.

On a l'existence de M, N positifs, λ et μ strictement positifs, tels que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq M f(\lambda x) \quad \text{et} \quad |h(x)| \leq N f(\mu x)$$

Soit $\rho = \min(\lambda, \mu)$.

Puisque $-\frac{\lambda^2 x^2}{2} \leq -\frac{\rho^2 x^2}{2}$ et $-\frac{\mu^2 x^2}{2} \leq -\frac{\rho^2 x^2}{2}$, on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |(g + ph)(x)| \leq (M + |p|N) f(\rho x). \quad \text{Donc } g + ph \in E.$$

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc lui-même un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Enfin, il est clair que la fonction f est dans E .

Q5 5.a. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a l'existence de M, N positifs, λ et μ strictement positifs, tels que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, |u(t)| \leq M f(\lambda t) \quad \text{et} \quad |v(x-t)| \leq N f(\mu(x-t)).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \forall t \in \mathbb{R}, |u(t)v(x-t)| &\leq \frac{MN}{2\pi} \exp\left(-\frac{\lambda^2 t^2}{2} - \frac{\mu^2 (x-t)^2}{2}\right) \\ |u(t)v(x-t)| &\leq \frac{MN}{2\pi} \exp\left(-\frac{(\lambda^2 + \mu^2)t^2}{2} + \mu^2 xt - \frac{\mu^2 x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette fonction est dominée au voisinage de $\pm\infty$ par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $u * v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

5.b. le changement de variable $s = \varphi(t) = x - t$, bijection C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, avec $|\varphi'(t)| = 1$, donne de suite le résultat:

$$\boxed{u * v = v * u}$$

$$\mathbf{5.c.} \quad (f * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}\right) dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2 + xt) dt.$$

Faisons le changement de variable $u = \sqrt{2}t$:

$$(f * f)(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \frac{xu}{\sqrt{2}}\right) du = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{xu}{\sqrt{2}}\right) f(u) du$$

$$\text{D'où, avec } \mathbf{Q.2.:} \quad (f * f)(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2}{4}} \quad \boxed{(f * f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$$

5.d. Il faut d'abord montrer que $u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$:

Pour cela, on remarque que:

- Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour t fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto u(t)v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- domination locale: soit $J = [-A, A]$ un segment de $\mathbb{R}$. En reprenant la majoration du IIB1), on a:

$$\forall x \in J, \forall t \in \mathbb{R}, |u(t)v(x-t)| \leq \frac{MN}{2\pi} \exp\left(-\frac{(\lambda^2 + \mu^2)t^2}{2} + \mu^2 A|t|\right)$$

La fonction majorante obtenue ne dépend pas de x et elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ (dominée au voisinage de l'infini par la fonction habituelle $t \mapsto t^{-2}$).

Ces trois hypothèses nous permettent de conclure que $u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$

Puis majorons $|(u * v)(x)|$ en utilisant: $|u(t)| \leq M(u) f(\lambda t)$ et $|v(x - t)| \leq M(v) f(\mu(x - t))$

En posant $\rho = \min(\lambda, \mu)$, il vient : $|(u * v)(x)| \leq M(u)M(v) \int_{\mathbb{R}} f(\rho t) f(\rho(x - t)) dt$

$$\begin{aligned} \text{Posons } s = \rho t : \int_{\mathbb{R}} f(\rho t) f(\rho(x - t)) dt &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}} f(s) f(\rho x - s) ds \\ &= \frac{1}{\rho} (f * f)(\rho x) = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} f\left(\frac{\rho x}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \forall x \in \mathbb{R}, \quad |(u * v)(x)| \leq \frac{M(u)M(v)}{\rho\sqrt{2}} f\left(\frac{\rho x}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{Ainsi: } u * v \in E.$$

Q6 6.a. Soit $u \in E$ et $t \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto e^{-tx}u(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dominée au voisinage de l'infini par la fonction $x \mapsto x^{-2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\hat{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

6.b. La fonction $U : (t, x) \mapsto e^{-tx}u(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (produit de deux fonctions de classe C^2).

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = -xe^{-tx}u(x) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) = x^2e^{-tx}u(x) \quad .$$

Domination locale: soit $J = [-A, A]$ un segment de $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in J, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) \right| \leq xe^{A|x|}u(x) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) \right| \leq x^2e^{A|x|}u(x) \quad .$$

Ces deux fonctions dominantes sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $\hat{u}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, avec:

$$\boxed{\hat{u}'(t) = - \int_{\mathbb{R}} xe^{-tx}u(x)dx \quad \text{et} \quad \hat{u}''(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2e^{-tx}u(x)dx}$$

Q7 7.a.

Il suffit de prendre $a = \frac{1}{4}$. En effet, pour tout x et pour tout t :

$$t^2 + (x - t)^2 - \frac{1}{4}(t^2 + x^2) = \frac{7}{4}t^2 + \frac{3}{4}x^2 - 2tx = \frac{3}{4}(x^2 - \frac{8}{3}tx) + \frac{7}{4}t^2 = \frac{3}{4}(x - \frac{4}{3}t)^2 + (\frac{7}{4} - \frac{4}{3})t^2 \geq 0$$

7.b. les fonctions u et v sont dans E , donc $u * v$ aussi (**5.c.**).

Donc $u * v$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (**6.a.**).

On souhaite appliquer le résultat d'inversion donné par l'énoncé à la fonction F :

$$F(x, t) = u(t)v(x - t).$$

F est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

Reprenons la majoration du **5.d.** ; en posant $K = \frac{MN}{2\pi}$ et $\rho = \min(\lambda, \mu)$, on a:

$$|F(x, t)| \leq K \exp(-\rho^2 t^2 - \rho^2(x - t)^2) \leq K \exp(-a\rho^2(t^2 + x^2)).$$

En notant: $h_1(t) = K \exp(-a\rho^2 t^2)$ et $h_2(x) = \exp(-a\rho^2 x^2)$, on a bien l'hypothèse de l'énoncé (h_1 et h_2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$). Donc:

$$\int_{\mathbb{R}} (u * v)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x - t)dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(\int_{\mathbb{R}} v(x - t)dx \right) dt.$$

Le changement de variable $s = x - t$ dans l'intégrale intérieure donne:

$$\int_{\mathbb{R}} v(x - t)dx = \int_{\mathbb{R}} v(s)ds.$$

$$\text{D'où: } \boxed{\int_{\mathbb{R}} (u * v)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)dx \int_{\mathbb{R}} v(x)dx}$$

7.c. Cette égalité peut encore s'écrire: $\widehat{u * v}(0) = \widehat{u}(0)\widehat{v}(0)$.

Généralisons:

$$\widehat{u * v}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x} (u * v)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x - t)e^{-\theta x}dt \right) dx.$$

Soit $G(x, t) = u(t)v(x - t)e^{-\theta x}$. G est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$|G(x, t)| \leq K e^{-\theta x} \exp(-a\rho^2(t^2 + x^2))$$

On a bien encore les hypothèses pour intervertir les deux intégrales, en posant cette fois:

$$h_1(t) = K \exp(-a\rho^2 t^2) \quad \text{et} \quad h_2(x) = \exp(-a\rho^2 x^2 - \theta x) \quad . \text{ donc:}$$

$$\widehat{u * v}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(\int_{\mathbb{R}} v(x - t) e^{-\theta x} dx \right) dt.$$

Le changement de variable $s = x - t$ dans l'intégrale intérieure donne:

$$\int_{\mathbb{R}} v(x - t) e^{-\theta x} dx = \int_{\mathbb{R}} v(s) e^{-\theta(s+t)} ds = e^{-\theta t} \widehat{v}(\theta).$$

Et finalement:

$$\boxed{\widehat{u * v}(\theta) = \widehat{u}(\theta) \widehat{v}(\theta)}$$

Partie III

Q8 Soit h dans E_1 .

8.a. Soit $\mathcal{P}(n) : h_n \in E_1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$.

Alors $h_{n+1} = h_n * h$ est bien définie et appartient à E (**Q5.d.**).

$$\text{De plus } \int_{\mathbb{R}} h_{n+1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) dx \int_{\mathbb{R}} h(x) dx = 1. \quad \text{Donc } h_{n+1} \in E_1.$$

Par récurrence, on a bien montré: $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \in E_1$.

8.b. Avec **7.d**, on a: $\widehat{h_n}(x) = \widehat{h_{n-1}}(x) \widehat{h}(x)$, d'où, par une récurrence évidente:

$$\boxed{\widehat{h_n}(x) = \left(\widehat{h}(x) \right)^n}$$

Q9 suite (f_n) associée à f :

9.a. le calcul de $f_2 = f * f$ a été fait en **5.c.**: $f_2(x) = K_2 e^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $K_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

9.b. Supposons qu'il existe une constante K_n telle que $f_n(x) = K_n \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } f_{n+1}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) f_1(x - t) dt = \frac{K_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^2}{2n} - \frac{(x - t)^2}{2}\right) dt \\ &= \frac{K_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-t^2 \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) + xt\right) dt \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $s = \sqrt{\frac{n+1}{n}} t$.

$$f_{n+1}(x) = \frac{K_n}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{s^2}{2} + x \sqrt{\frac{n}{n+1}} s\right) ds.$$

$$\text{Avec } \mathbf{Q2}: f_{n+1}(x) = K_n \sqrt{\frac{n}{n+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(\frac{n}{n+1} \frac{x^2}{2}\right) = K_n \sqrt{\frac{n}{n+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(n+1)}\right)$$

$$\text{Donc } f_{n+1}(x) = K_{n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{2(n+1)}\right), \quad \text{avec } K_{n+1} = K_n \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Par récurrence, on a bien montré, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'une constante K_n telle que:

$$f_n(x) = K_n \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right). \quad \text{De plus, partant de } K_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \text{ on obtient:}$$

$$K_n = \prod_{p=1}^{n-1} \sqrt{\frac{p}{p+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\boxed{f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right)}$$

9.c. $\widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\widehat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[\exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right]^n = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$

La suite proposée est constante, sa limite vaut $\exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$

Q10 suite (g_n) associée à g : $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(x) & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q10.a. g est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{|g(x)|}{f(x)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{\pi^2}{8}\right).$

Et comme g est nulle en dehors de ce segment, g vérifie bien une majoration requise pour être dans E , avec par exemple $\lambda = 1$ et $M(g) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{\pi^2}{8}\right).$

Enfin: $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx = \frac{1}{2} [\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1.$ Donc $g \in E_1.$

Q10.b. $(g * g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)g(-x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(-u)g(-x+u)du.$

Puisque g est paire: $(g * g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} g(u)g(x-u)du = (g * g)(x).$

Donc $g * g$ est paire.

Supposons $x \geq \pi$. Alors, puisque $t + (x-t) = x$, l'un des nombres t ou $x-t$ est supérieur ou égal à $\pi/2$, donc $g(t)g(x-t) = 0$. Ainsi $g * g$ est nulle sur $[\pi, +\infty[.$

Soit $x \in [0, \pi]$. $(g * g)(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)g(x-t)dt.$

$x-t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff t \in \left[x-\frac{\pi}{2}, x+\frac{\pi}{2}\right].$ Comme $-\frac{\pi}{2} \leq x-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \leq x+\frac{\pi}{2},$

il vient: $(g * g)(x) = \frac{1}{4} \int_{x-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos(x-t) dt = \frac{1}{8} \int_{x-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(x) + \cos(2t-x)] dt$
 $= \frac{1}{8} \left((\pi-x) \cos(x) + \frac{1}{2} [\sin(2t-x)]_{x-\pi/2}^{\pi/2} \right).$

$(g * g)(x) = \frac{1}{8} ((\pi-x) \cos(x) + \sin(x)) \text{ si } x \in [0, \pi], \quad (g * g)(x) = 0 \text{ si } x \geq \pi$

10.c. Soit $\mathcal{P}(n)$: g_n est paire, et nulle en dehors d'un segment $[-a_n, a_n]$.

$\mathcal{P}(1)$ est vraie, avec $a_1 = \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, avec $a_2 = \pi$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Alors $g_{n+1} = g_n * g$ est paire (même démonstration qu'au début du **10.b.**).

Soit $x \geq a_n + \frac{\pi}{2}$. Alors, puisque $t + (x-t) = x$, on a nécessairement $t \geq a_n$ ou $x-t \geq \frac{\pi}{2}$ donc $g_n(t)g(x-t) = 0$. Ainsi g_{n+1} est nulle sur $[a_n + \frac{\pi}{2}, +\infty[.$

Donc g_{n+1} est nulle en dehors de $[-a_{n+1}, a_{n+1}]$, avec $a_{n+1} = a_n + \frac{\pi}{2}$.

Par récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est paire est nulle en dehors du segment $\left[-\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}\right].$

10.d. $\widehat{g}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) e^{-xt} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(-t+i)x} dx \right).$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(-t+i)x} dx = \left[\frac{e^{(-t+i)x}}{-t+i} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{t+i}{t^2+1} (ie^{-t\pi/2} + ie^{t\pi/2})$

D'où:

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \cdot \text{ch}\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

10.e. $\widehat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\widehat{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$. Prenons le logarithme ($\widehat{g}$ est strictement positive).

$$\ln\left(\widehat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n \ln \widehat{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = n \left[\ln\left(\text{ch}\frac{t\pi}{2\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \right].$$

Faisons un développement limité pour n tendant vers l'infini:

$$\ln\left(\text{ch}\frac{t\pi}{2\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 + \frac{t^2\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{t^2\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{D'où: } \ln\left(\widehat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n\left(\frac{t^2\pi^2}{8n} - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\widehat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)t^2. \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)t^2\right)}$$

Partie IV

Q11 11.a. On applique le **6.b.** à la fonction h_n , qui est dans E :

$\widehat{h}_n$ est C^2 , donc admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\widehat{h}_n(t) = 1 + \widehat{h}_n'(0)t + \frac{1}{2}\widehat{h}_n''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - M_{1,n}t + \frac{1}{2}M_{2,n}t^2 + o(t^2).$$

$$\begin{aligned} \text{11.b. Par ailleurs: } \widehat{h}_n(t) &= \left(\widehat{h}(t)\right)^n = \left(1 - M_{1,1}t + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n \\ &= 1 - nM_{1,1}t + \left(\frac{n}{2}M_{2,1} + \frac{n(n-1)}{2}M_{1,1}^2\right)t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Par unicité du D.L., on en déduit: $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = nM_{2,1} + n(n-1)M_{1,1}^2$,
donc $V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = nM_{2,1} - nM_{1,1}^2 = nV_1$.

$$\boxed{M_{1,n} = nM_{1,1} \quad \text{et} \quad V_n = nV_1}$$

$$\text{Q12 } \widehat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$\text{Pour } n \text{ tendant vers l'infini: } \widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (M_{1,1} = 0).$$

Donc $\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ est strictement positif pour n assez grand. On peut prendre le logarithme:

$$\ln\left(\widehat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n \ln\left(\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n \ln\left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\widehat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{M_{2,1}t^2}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2}\right)}$$

remarque: on peut vérifier les résultats obtenus en III pour les fonctions f et g :

Pour f : $M_{1,1} = 0$, $M_{2,1} = m_2 = 1$. On a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Pour g : $M_{1,1} = 0$ car $x \mapsto xg(x)$ est impaire.

$$\begin{aligned}
M_{2,1} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} x^2 \cos(x) dx = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx = [x^2 \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x \sin(x) dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} + 2 [x \cos(x)]_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2
\end{aligned}$$

On retrouve: $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g_n} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \exp \left(\left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) t^2 \right)$

Exercice (extrait de Centrale PC 2016)

I. - L'opérateur de translation

- I.1. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).
Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)}$$

- I.2. Notons que $\tau^0(P) = P$.

Et que si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.

Ainsi, par récurrence

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \tau^k(P)(X) = P(X+k)}$$

- I.3. D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h+1$),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau^j(P)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc

$$\boxed{\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- I.4. La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.

Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres,

$$\boxed{\text{Sp}(\tau) = \{1\}}$$

Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.

Ainsi,

$$\boxed{M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisable}}$$

- I.5 0 n'étant pas valeur propre de τ ,

$$\boxed{\tau \text{ est bijective}}$$

Puis si on considère $\bar{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$,

on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \bar{\tau} = \bar{\tau} \circ \tau = \text{id}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau(\bar{\tau}(P))(X) = \bar{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\bar{\tau}(P))(X)$$

Donc

$$\boxed{\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)}$$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.

Donc la formule est toujours vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \tau^k(P)(X) = P(X+k)}$$

I.6. Avec l'expression de τ^{-1} , on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

I.7. La $k+1^e$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$$Q = M^T$$

I.8 M est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.

La $k+1^e$ ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1})^T)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1}))_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^n ((M^{-1}))_{j+1,k+1} v_j$$

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

I.9. On a alors

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$$

On vérifie bien :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1) - 1)^k = u_k$$

II. - L'opérateur de différence

II.1. Avec les mêmes notations qu'en I.1., avec P non constant on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = d a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)$$

II.2 D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.
Donc

$$\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

La question précédente montre aussi que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
Donc :

$$\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

II.3 Si $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leq (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Si $P \in \text{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.

Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leq n - j$.

Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

II.4. Notons Δ , la matrice de δ dans la base (P_k) .

Par construction de $\delta = \tau - \text{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.

Puis comme M commute avec I_{n+1} , alors d'après la formule de Newton : $\Delta^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j$.

Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j$$

II.5. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = \left[\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \right](X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.

Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0$$

II.6. a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.

Donc

$$u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.

Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.

Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u , notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.

Considérons alors A , la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.

Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbb{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

II.7 a) On a vu (questions I.B.3)) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.

Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b) Soit V stable par δ .

Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^n(P)) \subset V$.

Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.

Notons $(e_0, \dots, e_d)$ une base de V . Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d .

Sinon, on aurait une famille libre de $d + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.

Donc il existe P dans V de degré $r \geq d$.

Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d + 1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in [[0, n]] \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]}$$

