

Exercice

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{C}[X])^2$ tel que :

$$U = VQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(V).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par le polynôme V .

Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que

$\deg(B) = n + 1$. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .

Par exemple, si l'on suppose que l'on a $n = 2$, $A = X^2$, $B = X^3 - X$, $P = X^2 + X + 1$:

alors en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient $AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R$ avec $Q = X + 1$ et $R = 2X^2 + X$. Donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

I - Linéarité de l'application φ

Dans cette partie, on démontre que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \text{ et } AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1, R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

II - Un exemple

Dans cette partie II et uniquement dans cette partie II, on suppose que $n = 2$, que $A = X^2 + 2X$ et que $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

1. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{C}_2[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathbb{C}_2[X]$ (que l'on explicitera) dans laquelle la matrice de φ

est :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire la matrice de $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

III - Sur les polynômes interpolateurs de Lagrange

Dans cette partie, on suppose que B est scindé à racines simples. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les $n + 1$ racines de B , deux à deux distinctes.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associé aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \{0, \dots, n\}^2, L_k(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

9. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

10. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A L_k$ par B .

11. Soit $(j, \kappa) \in \{0, \dots, n\}^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

12. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

13. Conclure qu'il existe une base de $\mathbb{C}_n[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Fin de l'exercice, et fin du sujet