PC Lakanal - Mathématiques - DS N°3
Sujet Hard

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué d'un problème d'analyse, et d'un (gros) exercice d'algèbre. Il comporte 5 pages

Problème

Dans tout le problème, on notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Partie I

Q1 -

1.a. Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose $m_n(f) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On admettra dans toute la suite de ce problème que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

1.b. Déterminer m_1.

1.c. Lorsque $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence liant m_n et $m_{n'2}$.

En déduire une expression de m_n en fonction de n.

Q2 - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur en fonction de t.

On pourra considérer la forme canonique du trinôme $x \mapsto -\frac{x^2}{2} - tx$.

Q3 -

3.a. Le réel t étant fixé, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^k x^k}{k!} f(x)$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

3.b. Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}.$$

3.c. Retrouver la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ obtenue précédemment.

Partie II

Dans toute la suite du problème, on note E l'ensemble des fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif $M(g)$ et un réel strictement positif λ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leqslant M(g) f(\lambda x)$.

Q4 - Démontrer que E muni des lois $+$ et $\cdot$ usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui contient f.

Q5 - Soient u et v deux éléments de E. On note $u * v$ l'application définie, pour tout réel x pour lequel la formule a un sens, par

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

5.a. Démontrer que $u * v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

5.b. Démontrer que $u * v = v * u$.

5.c. Déterminer $(f * f)(x)$.

5.d. Démontrer que $u * v$ appartient à E (on utilisera le résultat de la question précédente).

Q6 - Soit $u \in E$. On définit l'application $\widehat{u}$ par : $\widehat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx}u(x)\,\mathrm{d}x$.

6.a. Montrer que $\widehat{u}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6.b. Montrer que $\widehat{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $\widehat{u}'(t)$ et $\widehat{u}''(t)$ à l'aide d'intégrales.

Q7 - *Dans cette question* **Q7** *seulement, on admet le résultat suivant :*
Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application continue de $\mathbb{R}^2$
dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications h_1 et h_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x,y)| \leqslant h_1(x)h_2(y),$$

alors $\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$ et $\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$ sont convergentes et ces deux intégrales sont égales.
Soient u et v deux éléments de E.

7.a. Démontrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout couple $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$-t^2 - (x-t)^2 \leqslant -a(t^2 + x^2).$$

7.b. Démontrer la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} (u * v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.c. Démontrer la relation, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u * v}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x\theta}(u * v)(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{u}(\theta)\widehat{v}(\theta).$$

On pourra utiliser l'égalité

$$\left(t + \frac{\theta}{2\gamma}\right)^2 + \left(\left(x + \frac{\theta}{\gamma}\right) - \left(t + \frac{\theta}{2\gamma}\right)\right)^2 = t^2 + (x-t)^2 + \frac{\theta x}{\gamma} + \frac{\theta^2}{2\gamma^2}.$$

Dans la suite de ce problème, on considère le sous-ensemble E_1 de E dont les éléments sont les
fonctions $h \in E$ telles que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On notera que la fonction f de la partie I est un élément de E_1. À toute fonction $h \in E_1$, on associe la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la récurrence suivante :

$$h_1 = h \quad \textit{et pour tout } n \geqslant 2, \quad h_n = h_{n-1} * h_1.$$

On remarquera que la fonction h_n est alors élément de E d'après II.B.4.
L'objectif est d'étudier certaines propriétés de cette suite de fonctions, dans un premier temps sur des exemples puis dans le cas général.

Partie III

Q8 - Soit h un élément de E_1.

8.a. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de E_1.

8.b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x)$ en fonction de $\widehat{h}(x)$ et de n.

Q9 - Dans cette question, on étudie la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ étudiée dans la partie I (on a donc posé $h = f$).

9.a. Déterminer une constante K_2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = K_2 e^{-x^2/4}$.

9.b. Déterminer une constante K_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = K_n e^{-x^2/(2n)}$.

9.c. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \widehat{f_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

Q10 - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x) & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10.a. Démontrer que $g \in E_1$.

10.b. Montrer que la fonction $g * g$ est paire. Donner pour $x \geqslant 0$ l'expression de $(g * g)(x)$ en fonction des valeurs de x : on distinguera deux intervalles pour x.

10.c. Démontrer que g_n est nulle en dehors d'un intervalle $[-a_n, a_n]$ que l'on précisera.

10.d. Déterminer l'expression de $\widehat{g}(t)$ en fonction de t.

10.e. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \widehat{g_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de t.

Partie IV

Soit h un élément de E_1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M_{1,n} = \int_{\mathbb{R}} x h_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad M_{2,n} = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2.$$

Q11 -

11.a. Montrer que la fonction $\widehat{h_n}$ possède un développement limité à l'ordre 2 en zéro dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{1,n}$ et $M_{2,n}$.

11.b. En déduire que $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

Q12 - On suppose dans cette question que la fonction h est telle que $M_{1,1} = 0$. Déterminer la limite de la suite $(\widehat{h_n}(\frac{t}{\sqrt{n}}))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Fin