

Exercice

Dans tout l'exercice :

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1} . On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est une base.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\text{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P , c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour un ensemble E et $f : E \rightarrow E$, on définit l'application $f^k : E \rightarrow E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \text{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

I L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) \end{aligned}$$

- 1.1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\text{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.
- 1.2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P .
- 1.3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j .
- 1.4. Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ . L'application τ est-elle diagonalisable ?
- 1.5. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1} . L'expression de τ^j trouvée à la question 1.2. pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
- 1.6. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j .
- 1.7. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j \tag{I.1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

- 1.8. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{I.2}$$

- 1.9. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

II L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{aligned}\delta : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) - P(X)\end{aligned}$$

II.1. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\text{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.

II.2. En déduire le noyau $\text{Ker}(\delta)$ et $\text{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ .

II.3. Plus généralement, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer les égalités suivantes :

$$\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \quad \text{et} \quad \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (\text{II.1})$$

II.4. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

II.5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (\text{II.2})$$

II.6. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

(a) Montrer que u et δ^2 commutent.

(b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u .

(c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Conclure.

II.7. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ .

(a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leq n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

(b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.