



DS N°2

Corrigé de la version hard

Problème Mines MP 2023

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ On note D l'ensemble de définition de σ .

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a par croissance comparée : $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$

donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement d'où $D \subset [-1, 1]$.

Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto \frac{x^k}{k^2}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$ (i).

De plus $\forall x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge selon ce cher Georges.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \left(x \mapsto \frac{x^k}{k^2} \right)$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$.

2 ▷ Soit α et $\beta \in \mathbb{R}$. On note $P = \alpha X^2 + \beta X$. Ainsi $P' = 2\alpha X + \beta$ et $P'' = 2\alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégrations par parties successives (avec des fonctions de classe C^1), on a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(t) \cos(nt) dt &= \left[P(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt = 0 + \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt \\ \text{or } \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt &= \left[2\alpha \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \text{ et } \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{(-1)^n P'(\pi) - P'(0)}{n^2} \text{ donc} \\ \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt &= \frac{(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta}{n^2} \end{aligned}$$

En prenant $\beta = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2\pi}$, on a $(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta = 1$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

Soit $t \in]0, \pi]$. On a donc $t/2 \in]0, \pi/2]$ et ainsi $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ et les termes de l'égalité existent bien.

Montrons l'égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation est triviale car $\sum_{k=1}^0 \cos(kt) = 0 = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

Pour l'hérédité, on considère $n \in \mathbb{N}$ tel que l'égalité soit vraie au rang n . On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} + \cos((n+1)t) = \frac{\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Or $\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) = \sin((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos((n+1)t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ donc

$$\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t) = \sin((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t) = \sin\left((n+1)t + \frac{t}{2}\right).$$

On a donc l'égalité au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+3)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

On peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Comme $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$, on aurait pu utiliser une somme géométrique de raison $e^{it} \neq 1$ car $t \in]0, \pi]$.

3 ▷ On effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: φ et $t \mapsto \frac{-\cos(xt)}{x}$:

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = \left[\varphi(t) \frac{-\cos(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi \varphi'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt = \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi) \cos(\pi x) + \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt}{x}$$

$$\text{Ainsi } \left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi) \cos(\pi x)| + \left| \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt \right|}{x} \text{ donc}$$

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| \cdot |\cos(\pi x)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| \cdot |\cos(xt)| dt}{x} \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt}{x}$$

$$\text{or } \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

alors selon le théorème des gendarmes, on a montré le lemme de Riemann-Lebesgue pour φ de classe $\mathcal{C}^1$:

alors selon le théorème des gendarmes, on a montré le lemme de Riemann-Lebesgue pour φ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

On a $\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ donc selon la première égalité de la question 2 :

$$\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{2 \frac{t}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2n+1$$

Comme $t \mapsto \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ se prolonge par continuité en 0, avec la deuxième égalité de la question 2 on a :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) dt$$

On pose $g : t \mapsto \frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi \sin(\frac{t}{2})}$ qui se prolonge par continuité sur $[0, \pi]$ car $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2\pi t}{2\pi t} = -1$.

En notant φ le prolongement continu de g sur $[0, \pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \varphi(t) dt - \int_0^\pi \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi} \right) dt$$

On a φ continue sur $[0, \pi]$ (i) et φ est dérivable sur $]0, \pi[$ (ii) et

$$\forall t \in]0, \pi[, \varphi'(t) = \frac{(2t - 2\pi) \sin(t/2) - (1/2)(t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{4\pi \sin^2(t/2)} = \frac{4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{8\pi \sin^2(t/2)}$$

Quand $t \rightarrow 0$, on a

$$4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2) = 4t(t/2 + o(t^2)) - 4\pi(t/2 + o(t^2)) - t^2(1 + o(t)) + 2\pi t(1 + o(t))$$

Ainsi $4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2) = t^2 + o(t^2) \sim t^2$ d'où $\varphi'(t) \sim \frac{t^2}{8\pi(t/2)^2}$

On a donc $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{2\pi}$ (iii)

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème du prolongement de la dérivée s'applique :

$$\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t)$$

donc φ' est continue en 0 or φ' est continue sur $]0, \pi[$.

Ainsi φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ et le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$$

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = 0 - \int_0^\pi \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi} \right) dt$. Ainsi

$$\sigma(1) = \int_0^\pi \left(\frac{2\pi t - t^2}{4\pi} \right) dt = \left[\frac{3\pi t^2 - t^3}{12\pi} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{3\pi^3 - \pi^3}{12\pi} = 0$$

On a bien $\boxed{\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}}$

4 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x = \exp(x \ln(\sin(t)))$ est continue sur $]0, \pi/2[$. Or

$$(\sin(t))^x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$$

Par équivalence, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable en 0 si et seulement si $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$ l'est.

Ainsi $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable sur $]0, \pi/2[$ si et seulement si $-x < 1$.

Comme $t \mapsto (\sin(t))^x$ est positive sur $]0, \pi/2[$, le domaine de définition de f est I

Soit $x \in \mathbb{I}$. On a $x + 2 \in \mathbb{I}$.

On effectue alors une intégration par parties, sous réserve de convergence du bloc tout intégré :

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+1} \sin(t) dt = \left[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t) \right]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x \cos^2(t) dt$$

$$f(x+2) = (x+1) \left(\int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x dt - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+2} dt \right) = (x+1)f(x) - (x+1)f(x+2)$$

On a bien $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$ (1)

5 ▷ On pose $g : \begin{cases} \mathbb{I} \times]0, \pi/2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto (\sin(t))^x \end{cases}$

(i) Soit $t \in]0, \pi/2]$. La fonction $g(\cdot, t) : x \longmapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{I}$ de dérivées successives :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) : x \longmapsto \ln(\sin(t)) \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\cdot, t) : x \longmapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{I}$. Les fonctions $g(x, \cdot)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ (argument inutile!)

La fonction $g(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ selon la question précédente.

Quand $t \longrightarrow 0^+$, on a $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^x = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$

On a $\frac{x+1}{2} > 0$ donc par croissance comparée et par composition $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} \longrightarrow 0$

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = o\left((\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}\right)$

Comme $\frac{x-1}{2} > -1$, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ comme en question 3.

Par comparaison la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

(iii) Soit $a < b$ dans $\mathbb{I}$. On a alors l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, \pi/2], \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x \leq \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$$

avec la fonction $t \longmapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$ intégrable sur $]0, \pi/2]$, comme en (ii).

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème de la classe $\mathcal{C}^2$ pour les intégrales s'applique : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{I}$

De plus pour tout $x \in \mathbb{I}$, on a

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \leq 0 \text{ et } f''(x) = \int_0^{\pi/2} \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \geq 0$$

ainsi f est décroissante et convexe sur $\mathbb{I}$

6 ▷ Quand $x \longrightarrow -1$, $f(x) = \frac{(x+2)f(x+2)}{x+1}$ selon 4 et $(x+2)f(x+2) \longrightarrow 1 \times f(1)$ car f continue sur $\mathbb{I}$ et $1 \in \mathbb{I}$.

Par ailleurs $f(1) = [-\cos(t)]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} = 1 \neq 0$, on peut conclure que $f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$

7 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $n \in \mathbb{I}$ et en multipliant par $f(n+1)$, on a : $(n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2)$

Ainsi la suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Comme $f(0) = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1) = 1f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$.

On peut conclure que $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$

Comme f est décroissante et positive, on a donc $f(n+1)^2 \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \leq f(n)^2$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2n}$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq f(n) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Soit $x \geq 1$. On note $[x]$ la partie entière de x . On a donc $1 \leq [x] \leq x \leq [x] + 1$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2([x]+2)}} \leq f([x]+1) \leq f(x) \leq f([x]) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2[x]}}$$

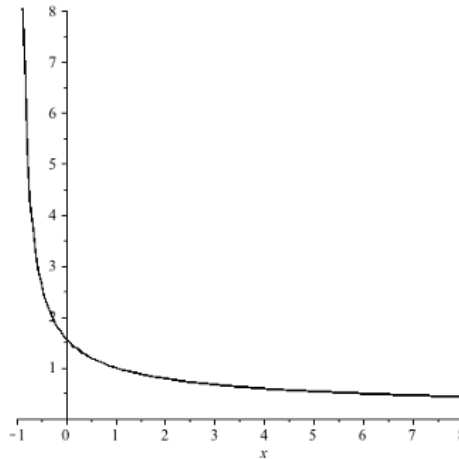
Or $x-1 \leq [x] \leq x \leq [x] + 2 \leq x+2$

Quand $x \longrightarrow +\infty$, on a $x-1 \sim x \sim x+2$, d'où par encadrement d'équivalents, on a $[x] \sim x$ et $[x] + 2 \sim x$.

À nouveau par encadrement d'équivalents, on a bien $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

- 8 ▷ Sur le graphique doivent apparaître les points $(0, f(0)) = (0, \pi/2)$, $(1, f(1)) = (1, 1)$, les asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 0$.

On observera que f est décroissante et convexe.



Il n'est pas aisé de faire apparaître les équivalents sur un graphique surtout à main levée.

3 Développement en série entière

- 9 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $]0, \pi/2]$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, on a $\sqrt{\sin(t)}(\ln(\sin(t)))^n \rightarrow 0$ par croissance comparée.

or $\sin(t) \sim t$, donc $\sqrt{t}(\ln(\sin(t)))^n \rightarrow 0$

D'où $(\ln(\sin(t)))^n = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0.

Par comparaison à une fonction intégrable, $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

Ainsi l'intégrale généralisée D_n converge absolument donc converge

Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$; $dt = -du$ nous donne : $D_1 = - \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi/2 - u)) du$

On a bien $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$

- 10 ▷ En utilisant 5, on a $f'(0) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = D_1$ et $f'(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \sin(t) dt$.

Avec 9 et en effectuant le changement de variable $u = 2t$; $du = 2dt$, on a

$$2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\ln(2)\pi}{2}$$

En effectuant le changement de variable $u = \pi - t$, $du = -dt$, on a :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = - \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = D_1$$

donc $2D_1 = \frac{2}{2}D_1 - \frac{\ln(2)\pi}{2}$. Ainsi $f'(0) = D_1 = -\frac{\ln(2)\pi}{2}$

On effectue une intégration par parties sous réserve :

$$f'(1) = [(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t))]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t)) \cos(t)}{\sin(t)} dt$$

On a vu en 9 que $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$ or $1 - \cos(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^2/2$

d'où $(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ et $[(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t))]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} = 0$; ce qui valide l'intégration par parties.

On avait choisi la seule primitive qui pouvait convenir.

On a donc avec le changement de variable $u = \cos(t)$; $du = -\sin(t)dt$:

$$f'(1) = - \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t)) \cos(t)}{1 - \cos(t)^2} \sin(t) dt = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 + \cos(t)} \sin(t) dt = + \int_1^0 \frac{u}{1 + u} du = \int_0^1 \left(\frac{1}{u + 1} - 1 \right) du$$

Ainsi $f'(1) = [\ln|u + 1| - u]_{u=0}^{u=1} = \ln(2) - 1 - \ln(1) + 0$

On peut conclure que $\boxed{f'(1) = \ln(2) - 1}$

Exercice

Je donne le corrigé sur demande, mais finalement il n'était pas dans le sujet que vous avez eu....

