



2025 - 2026

DM N°3

Version soft

Notations et objectifs

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f , $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f .

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \text{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_k \text{ fois}$.

Si $f_1, \dots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \dots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

On admet dans tout ce problème qu'un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

PARTIE I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que f est diagonalisable.
- 2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
- 3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) . Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P , exprimer A^m en fonction de D , P et P^{-1} .
- 4) Calculer P^{-1} , puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
- 5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
- 6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
- 7) Dédire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.
- 2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
- 3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
- 4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.
- 5) Après avoir calculé p^2 , q^2 , $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h , combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.
- 6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f . Écrire la matrice D de f , puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.
- 7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
- 8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q .
- 9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

PARTIE II

Soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \text{id} &= p + q \\ f &= \lambda p + \mu q \\ f^2 &= \lambda^2 p + \mu^2 q \end{cases}$$

- 1) Calculer $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id})$. En déduire que f est diagonalisable.
- 2) Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.
- 3) Dédire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.
- 4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.
Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q .
- 5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

- 6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q . Déterminer la dimension de F .
- 7) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.
- 8) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.
- 9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.
- 10) En déduire que si $\dim(E) \geq 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE III

Soient $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$$

- 1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$$

- 2) En déduire que $\prod_{i=1}^m (f - \lambda_i \text{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.
- 3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}$$

Montrer que pour tout entier ℓ , tel que $1 \leq \ell \leq m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell \text{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i .

6) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F .

7) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

8) Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.

8.1) Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f .

8.2) Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h .

8.3) En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

9) Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

PARTIE IV

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

2) Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ alors $2p - 1 \leq n$.

3) Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage

de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

4) Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

5) Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$. Plus généralement, montrer que pour tout α réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$.

B) 1) Soit $T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ .

Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

2) On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ . Déduire de la question précédente que $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n$.

3) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

Fin de l'énoncé



2025 - 2026

DM N°6

Version hard

Ne pas traiter les questions au-delà de IV.F1.

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul.

Si f est un endomorphisme de E , pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f , c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F .

Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \text{id}_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n .

Pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans $\mathbb{K}$.

I Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

I.A – Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f .

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geq 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.

Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables.

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f . Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f .

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f .

I.C.3) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f . On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f .

I.D.2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f , alors f est diagonalisable. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

II Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n , qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $[1, p]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i .

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ est stable par f .

- II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F . Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.
- II.A.3) Si on pose $H_x = \{i \in [1, p] \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = [1, r]$ avec $1 \leq r \leq p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[1, r]$.
On pose $V_x = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.
Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x .
- II.A.4) Montrer que pour tout j de $[1, r]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.
- II.A.5) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x .
- II.A.6) En déduire que pour tout i de $[1, r]$, x_i appartient à F et conclure.
- II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.
- II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[1, p]$.
- II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?
- II.B.3) Si $n \geq 3$ et $k \in [2, n-1]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?
- II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

III Troisième partie

- III.A – On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$.
- III.A.1) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- III.A.2) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D .
- a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
- b) Montrer que la famille $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre de F .
- c) En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.
- III.A.3) Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D .
- III.B – On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
- III.B.1) Déterminer l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$ soit une base de E .
- III.B.2) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E , quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$?
- III.B.3) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1} .
- III.B.4) Donner tous les sous-espaces de E stables par f . Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux $\ker(f^i)$ pour i dans $[0, n]$.

IV Quatrième partie

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = MX$ pour tout X de E .

- IV.A – Si on pose $X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$ où $\delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$ et $\mathcal{B}_n = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de E , quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_n$?

IV.B – Montrer que si n est impair, alors f admet au moins une valeur propre réelle.

IV.C – Dans cette question, $\lambda = \alpha + i\beta$, avec (α, β) dans $\mathbb{R}^2$, est une valeur propre non réelle de M et Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul est tel que $MZ = \lambda Z$.

Si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on pose $\overline{M} = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $m'_{i,j} = \overline{m_{i,j}}$ (conjugué du nombre complexe $m_{i,j}$) pour

tout (i, j) de $[1, n]^2$ et si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on pose $\overline{Z} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ avec $z'_i = \overline{z_i}$ pour tout i de $[1, n]$.

On pose $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$.

- IV.C.1) Vérifier que X et Y sont dans E et montrer que la famille (X, Y) est libre dans E .
- IV.C.2) Montrer que le plan vectoriel F engendré par X et Y est stable par f et donner la matrice de f_F dans la base (X, Y) .
- IV.D – Que penser de l'affirmation : « tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable » ?

IV.E – Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant ni droite ni plan stable?

IV.F – Dans cette question on considère le système différentiel linéaire $\mathcal{S} : X' = AX$ associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On appelle trajectoires de $\mathcal{S}$ les arcs de l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétrés par les solutions de $\mathcal{S}$. On veut déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes de $\mathcal{S}$.

IV.F.1) Construire une matrice P inversible et une matrice $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec (α, β, γ) dans $(\mathbb{R}^*)^3$ telles que $P^{-1}AP = T$, et déterminer un plan F et une droite G stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

IV.F.2) Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_U : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = U \end{cases}$ lorsque U appartient à G .

IV.F.3) Pour tout $\sigma = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$, on considère le problème de Cauchy $\mathcal{C}_\sigma : \begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -2x - y, \\ x(0) = a, y(0) = b, \end{cases}$ et $\varphi = (x, y)$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ l'unique solution de $\mathcal{C}_\sigma$.

Préciser $x'(0)$ et $y'(0)$; montrer que x et y sont solutions d'une même équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants et ainsi en déduire φ en fonction de a et de b .

IV.F.4) Déterminer les trajectoires rectilignes et les trajectoires planes du système différentiel $X' = AX$.

V Cinquième partie

Dans cette partie E est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On considère un endomorphisme f de E et on note A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

V.A –

V.A.1) Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormée. Ce produit scalaire est noté de manière usuelle par $\langle u, v \rangle$ ou plus simplement $u \cdot v$ pour tout (u, v) de E^2 .

V.A.2) Si u et v sont représentés par les matrices colonnes respectives U et V dans la base $\mathcal{B}$, quelle relation simple existe-t-il entre $u \cdot v$ et le produit matriciel tUV (où tU est la transposée de U)?

V.B – Soit H un hyperplan de E et D son supplémentaire orthogonal.

Si (u) est une base de D et si U est la matrice colonne de u dans $\mathcal{B}$, montrer que H est stable par f si et seulement si U est un vecteur propre de la transposée de A .

V.C – Déterminer ainsi le(s) plan(s) stable(s) de f lorsque $n = 3$ et A est la matrice considérée en IV.F.

V.D – Dans cette question, E est un espace vectoriel réel de dimension n et f est un endomorphisme de E .

V.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors il existe n hyperplans de E , $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$, tous stables par f , tels que $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$.

V.D.2) Un endomorphisme f de E pour lequel il existe n hyperplans de E stables par f et d'intersection réduite au vecteur nul est-il nécessairement diagonalisable?