Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

Feuille d'exercices

Déterminants

Exercice 1

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$ et $D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix}$.

Exercice 2

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$ et $D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 3

Soient n un entier strictement positif, et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & 0 \\ 0 & a_2 & ⋰ & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4

Soit, pour x réel, le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ \dfrac{x^2}{2!} & x & 1 & (0) & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \dfrac{x^n}{n!} & \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & & \dfrac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$ (avec la convention $D_0 = 1$).

1. Calculer D_1, D_2, D_3. Formuler une conjecture quant à la valeur de D_n.

2. Pour $n \geq 2$, montrer, grâce à des développements successifs, que $D_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k!} D_{n-k}$.

3. En déduire la valeur de D_n.

Commentaire la question **2.**, délicate, doit se traiter posément, en détaillant les déterminants mis en jeu.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant D_n de la matrice de terme général $|i - j|$, $1 \leq i, j \leq n$.

Commentaire si vous savez traiter le cas $n = 5$ …

Exercice 6

On note D_n le déterminant de la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{0 \leq i, j \leq n}$ avec $a_{i,j} = (i + j)!$, et T_n le déterminant de la matrice $B = \left(a_{i,j}\right)_{0 \leq i, j \leq n}$ avec $b_{i,j} = \begin{pmatrix} i + j \\ i \end{pmatrix}$.

1. Calculer D_0, D_1, D_2 ainsi que T_0, T_1, T_2.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 1$.

3. Calculer D_n.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left[\min(i, j)\right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

1. Calculer le déterminant de A.

2. Si A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer le déterminant de A.

2. Lorsque cela est possible, déterminer son inverse.

Exercice 9

Calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a+b & b & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$.

Exercice 10

Calculer le déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & & \vdots \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & \ddots & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$

Exercice 12

Soient $n \geq 2$, et a, b, c trois nombres complexes. Calculer le déterminant $D_n(a, b, x) = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & a \\ b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$:

1. Lorsque $a \neq b$.

2. Lorsque $a = b$.

Exercice 13

Soient $n \geq 2$, et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant : $D = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & \cdots & a_{n-1} + a_n & a_n + a_1 \\ a_1^2 + a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 + a_n^2 & a_n^2 + a_1^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n + a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n + a_n^n & a_n^n + a_1^n \end{vmatrix}$.

Exercice 14

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soient $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$, $z = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}}$.

On pose $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{(n-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer qu'un argument de D est $\dfrac{\pi(n-1)(3n-2)}{4}$.

2. Calculer D^2, et en déduire D.

Exercice 15

1. Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

2. Dans quelle mesure le résultat trouvé se généralise – t – il ?

Exercice 16

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le déterminant tridiagonal d'ordre n suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

Exercice 17

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\left(c_1, \ldots, c_n\right) \in \mathbb{K}^n$, et

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c_n \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A(X) = A + XJ.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(c_i - x\right)$.

1. Pour $a \neq b$, évaluer $P(X) = \det\left(A(X)\right)$.

En déduire que $\det A = \dfrac{b\,f(a) - a\,f(b)}{b-a}$.

2. Toujours à l'aide de la fonction f, exprimer $\det A$ dans le cas où $a = b$.

Exercice 18

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 des réels, et $A = \left(\left(1 - \delta_{i,j}\right) a_i\right)_{(i,j) \in \llbracket 1,4 \rrbracket^2}$, où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

On pose $P = \det\left(A + x I_4\right)$.

1. Déterminer $P\left(a_i\right)$ pour $i \in \llbracket 1,4 \rrbracket$.

2. Trouver des constantes λ et α_i telles que :

$$\frac{P}{\left(X - a_1\right)\left(X - a_2\right)\left(X - a_3\right)\left(X - a_4\right)} = \lambda + \sum_{i=1}^{4} \frac{\alpha_i}{X - \alpha_i}.$$

3. En déduire $\det(A)$.

Exercice 19

Soit $n \geq 2$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons r son rang, et A sa comatrice, définie par : $A_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{i,j}$,

$(-1)^{i+j} A_{i,j}$ étant le cofacteur de $a_{i,j}$ dans la matrice A.

1. Prouver que $A^{\mathsf{T}} A = A^{\mathsf{T}} A = \det(A) . I_n$.

2. Calculer le rang et le déterminant de A.

> *Commentaire*
>
> **1.** Ecrire la formule du produit matriciel, et comparer avec la formule de développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne.
>
> **2.** Discuter suivant le rang de A (trois cas distincts).

Exercice 20

Soient n un entier strictement positif, et $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A est inversible et $AC = CA$. Et

Soit la matrice par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Établir la formule : $\det(M) = \det(AB - BC)$.

On pourra écrire M comme produit de matrices triangulaires par blocs

Exercice 21

Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, différente des applications constantes égale à 0 ou égale à 1.

On suppose que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ f(AB) = f(A) f(B)$.

1. Donner un exemple d'application f vérifiant cette propriété.

On revient maintenant au cas général.

2. Calculer $f(I_n)$ et $f(O_n)$.

3. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible peut s'écrire sous la forme $M = PNQ$, avec P et Q inversibles, et N nilpotente.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(M) \neq 0$.

Exercice 22

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto AM \end{pmatrix}$.

Déterminer la trace et le déterminant de A.

Exercice 23*

1. Soient $a_1, ..., a_p$ des réels deux à deux distincts, et $t_1, ..., t_p$ des réels non tous nuls ($p \geq 1$). Montrer, par récurrence, que la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par la formule : $f(x) = t_1 x^{a_1} + t_2 x^{a_2} + ... + t_p x^{a_p}$ s'annule au plus $p - 1$ fois sur $]0, +\infty[$.

Hint : on pourra considérer la fonction $t \mapsto t_1 x^{a_1 - a_{p+1}} + t_2 x^{a_2 - a_{p+1}} + ... + t_p x^{a_p - a_{p+1}} + t_{p-1}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_n$, $x_1, ..., x_n$ vérifiant les conditions :

$$a_1 < a_2 < ... < a_n \text{ et } 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n.$$

Montrer que le déterminant $D = \begin{vmatrix} x_1^{a_1} & x_2^{a_1} & \cdots & x_n^{a_1} \\ x_1^{a_2} & x_2^{a_2} & \cdots & x_n^{a_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{a_n} & x_2^{a_n} & \cdots & x_n^{a_n} \end{vmatrix}$ est strictement positif.

On pourra là encore raisonner par récurrence, et faire varier x_n.