PC - Lakanal

2025- 2026

Programme de colles S6

Du 10 – 11 au 14 – 11

Algèbre linéaire

Révisions de première année essentiellement. Points nouveaux, qui peuvent tous faire l'objet de questions de cours :

1. Espace vectoriel produit : définition. En dimension finie, dimension d'un espace produit.
2. Sommes, sommes directes de n sous espaces vectoriels. $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est le plus petit sous – ev de E contenant chacun des E_i.

   Toute famille obtenue par concaténation d'une famille génératrice de chacun des E_i est une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{n} E_i$.

   Caractérisation des sommes directes :

   - La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe ssi une famille obtenue par concaténation d'une base de chacun des E_i est une base de la somme. On peut remplacer « une » par « toute ». Base adaptée à une décomposition en somme directe.
   - La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si : $\forall \left(x_1, \ldots, x_n \right) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$.
   - Lorsque les E_i sont de dimension finie : $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim \left(E_i \right)$, et les E_i sont en somme directe si et seulement si $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim \left(E_i \right)$.

   On rappelle que, pour $n > 2$, le fait que l'intersection des E_i soit réduite à $\{0\}$, ou que les intersections deux à deux soient réduites à $\{0\}$, ne prouve pas que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

3. Sous –espaces stables. Endomorphismes induits. Trigonalisation par blocs.
4. Polynômes interpolateurs de Lagrange : définition, basicité, écriture d'un polynôme dans une base de Lagrange, cas particulier du polynôme constant égal à 1. Lien avec les matrices de Vandermonde (en revanche, les déterminants de Vandermonde ne sont pas encore connus).
5. Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées. Polynômes annulateurs. En dimension finie, existence de polynômes annulateurs (non nuls).

Tout début de la réduction

Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée. On doit pouvoir déterminer les éléments propres d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme. Aucun autre résultat concernant le chapitre réduction n'est au programme de colle.

La semaine d'après

Algèbre linéaire ; un peu plus de réduction ; calculs de déterminants.