

# Informatique 2<sup>ème</sup> année

Vous partez en vacances en avion et vous avez une limite : votre valise ne doit pas peser plus de 24 kg.

Chacun des  $n$  objets de votre chambre a une utilité  $u_i$ , et un poids  $p_i$ , indiqués ci-dessous.

objet	poids	utilité
Ordinateur	3	7
Matelas gonflable	4	8
Tente	5	12
Vêtements	5	10
Cadeaux	7	13
Cours de maths	8	15
Vélo pliant	8	17

**Question 1** : Quels articles faut-il mettre dans la valise pour maximiser l'utilité totale sans dépasser le poids limite de  $L = 24$  kg ?

.....

On cherche un algorithme qui prend en entrée les poids des objets, leurs utilités, et la limite de poids, et détermine comment maximiser l'utilité totale.

Une stratégie naturelle consisterait à examiner les objets par ordre d'utilité décroissante, et à prendre un objet dans la valise à chaque fois qu'il ne dépasse pas le poids restant disponible.

**Question 2** : Comment appelle-t-on une telle stratégie ? .....

**Question 3** : Dans la situation ci-dessus, quelle combinaison d'objets résulte de cette stratégie ? Est-ce une stratégie optimale ? .....

**Question 4** : Une variation de cette stratégie serait d'examiner les objets non pas par ordre d'utilité décroissante, mais selon leur rapport utilité/poids, leur «utilité par kg». Cette stratégie donne-t-elle la réponse optimale ? Justifier. ....

**Question 5** : Pour trouver une solution optimale, on peut énumérer toutes les combinaisons d'objets, éliminer celles qui dépassent la limite de poids, et déterminer parmi celles qui restent, laquelle a la plus grande utilité totale. Quelle serait, en fonction du nombre d'objets  $n$ , la complexité de cette approche ? .....

*Pour les trois prochaines questions, on suppose fixés le nombre d'objets  $n$ , les poids  $p_1, \dots, p_n$ , les utilités  $u_1, \dots, u_n$ , et la limite de poids  $L$ .*

Pour  $t \in \llbracket 0, L \rrbracket$  et  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $M(t, i)$  l'utilité totale maximale qu'on peut obtenir en choisissant des objets parmi les  $i$  premiers objets, et sans dépasser un poids total de  $t$ .

**Question 6** : Quelles valeurs de  $t$  et  $i$  choisir pour que  $M(t, i)$  réponde à notre problème de valise ? .....

**Question 7** : Soit  $i > 0$ , exprimer  $M(t, i)$  en fonction des  $M(t', i - 1)$ ,  $t' \leq t$ . Justifier (On pourra distinguer plusieurs cas). ....

**Question 8** : Pour  $i = 0$ , et  $t \in \llbracket 0, L \rrbracket$ , quelle est la valeur de  $M(t, i)$  ? .....

*On ne suppose plus les données  $n$ ,  $u_i$ ,  $p_i$  et  $L$  fixées.*

**Question 9** : Écrire une fonction `tableauM(u,p,L)` qui prend en argument les données du problème (une liste d'utilités `u`, une liste de poids `p`, et un poids total limite `L`), et renvoie un tableau (une liste de listes) contenant toutes les valeurs  $M(t, i)$ .

( Attention : le poids et l'utilité du premier objet,  $p_1$  et  $u_1$ , sont désignés en python par les expressions `p[0]` et `u[0]`. Il faudra tenir compte de ce décalage d'indices dans le programme, ou modifier les listes `u` et `p` pour que les données du problème soient bien aux indices 1 à  $n$ . )

**Question 10** : Cette fonction donne la plus grande valeur d'utilité totale possible, mais ne dit pas quels objets il faut mettre dans la valise pour atteindre cette utilité totale. Écrire une fonction `solution(u,p,L)` qui détermine une liste d'objets à mettre dans la valise pour maximiser l'utilité totale.

**Question 11** : Dans la situation du début de l'énoncé, on imagine que la limite passe à 26 kg. Il y a alors plusieurs façons distinctes d'obtenir d'obtenir l'utilité totale maximale. Combien, et lesquelles ? .....

**Question 12** : On pose  $V(t, i)$  le nombre de combinaisons distinctes qui permettent de maximier l'utilité totale, sous les mêmes conditions que pour  $M(t, i)$ .

Indiquer comment calculer toutes les valeurs de  $V(t, i)$ . .....

**Question 13** : Écrire une fonction python `nbsolutions(u,p,L)` qui renvoie le nombre de combinaisons optimales distinctes.

**Indications pour la question 7** : Les combinaisons d'objets choisis parmi les  $i$  premiers sans dépasser le poids total  $t$  se rangent en deux catégories :

- Catégorie 1 : les combinaisons qui contiennent l'objet  $i$ .
- Catégorie 2 : les combinaisons qui ne contiennent pas l'objet  $i$ .

1. Exprimer l'utilité totale maximale des combinaisons de catégorie 1 en fonction de  $M(t, i - 1)$  .....
2. Exprimer l'utilité totale maximale des combinaisons de catégorie 2 en fonction de  $M(t - p_i, i - 1)$  .....
3. Exprimer alors  $M(t, i)$ , qui est l'utilité totale maximale des combinaisons des deux catégories réunies. Attention, dans certains cas la catégorie 2 est vide ! .....