

Informatique 2^{ème} année

Vous partez en vacances en avion et vous avez une limite : votre valise ne doit pas peser plus de 24 kg.

Chacun des n objets de votre chambre a une utilité u_i , et un poids p_i , indiqués ci-dessous.

objet	poids	utilité
Ordinateur	3	7
Matelas gonflable	4	8
Tente	5	12
Vêtements	5	10
Cadeaux	7	13
Cours de maths	8	15
Vélo pliant	8	17

Question 1 : Quels articles faut-il mettre dans la valise pour maximiser l'utilité totale sans dépasser le poids limite de $L = 24$ kg ?

On cherche un algorithme qui prend en entrée les poids des objets, leurs utilités, et la limite de poids, et détermine comment maximiser l'utilité totale.

Une stratégie naturelle consisterait à examiner les objets par ordre d'utilité décroissante, et à prendre un objet dans la valise à chaque fois qu'il ne dépasse pas le poids restant disponible.

Question 2 : Comment appelle-t-on une telle stratégie ?

Question 3 : Dans la situation ci-dessus, quelle combinaison d'objets résulte de cette stratégie ? Est-ce une stratégie optimale ?

Question 4 : Une variation de cette stratégie serait d'examiner les objets non pas par ordre d'utilité décroissante, mais selon leur rapport utilité/poids, leur «utilité par kg». Cette stratégie donne-t-elle la réponse optimale ? Justifier.

Question 5 : Pour trouver une solution optimale, on peut énumérer toutes les combinaisons d'objets, éliminer celles qui dépassent la limite de poids, et déterminer parmi celles qui restent, laquelle a la plus grande utilité totale. Quelle serait, en fonction du nombre d'objets n , la complexité de cette approche ?

Pour les trois prochaines questions, on suppose fixés le nombre d'objets n , les poids p_1, \dots, p_n , les utilités u_1, \dots, u_n , et la limite de poids L .

Pour $t \in \llbracket 0, L \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $M(t, i)$ l'utilité totale maximale qu'on peut obtenir en choisissant des objets parmi les i premiers objets, et sans dépasser un poids total de t .

Question 6 : Quelles valeurs de t et i choisir pour que $M(t, i)$ réponde à notre problème de valise ?

Question 7 : Soit $i > 0$, exprimer $M(t, i)$ en fonction des $M(t', i - 1)$, $t' \leq t$. Justifier (On pourra distinguer plusieurs cas).

Question 8 : Pour $i = 0$, et $t \in \llbracket 0, L \rrbracket$, quelle est la valeur de $M(t, i)$?

On ne suppose plus les données n , u_i , p_i et L fixées.

Question 9 : Écrire une fonction `tableauM(u,p,L)` qui prend en argument les données du problème (une liste d'utilités `u`, une liste de poids `p`, et un poids total limite `L`), et renvoie un tableau (une liste de listes) contenant toutes les valeurs $M(t,i)$.

(Attention : le poids et l'utilité du premier objet, p_1 et u_1 , sont désignés en python par les expressions `p[0]` et `u[0]`. Il faudra tenir compte de ce décalage d'indices dans le programme, ou modifier les listes `u` et `p` pour que les données du problème soient bien aux indices 1 à n .)

Question 10 : Cette fonction donne la plus grande valeur d'utilité totale possible, mais ne dit pas quels objets il faut mettre dans la valise pour atteindre cette utilité totale. Écrire une fonction `solution(u,p,L)` qui détermine une liste d'objets à mettre dans la valise pour maximiser l'utilité totale.

Question 11 : Dans la situation du début de l'énoncé, on imagine que la limite passe à 26 kg. Il y a alors plusieurs façons distinctes d'obtenir d'obtenir l'utilité totale maximale. Combien, et lesquelles ?

Question 12 : On pose $V(t,i)$ le nombre de combinaisons distinctes qui permettent de maximiser l'utilité totale, sous les mêmes conditions que pour $M(t,i)$.

Indiquer comment calculer toutes les valeurs de $V(t,i)$

Question 13 : Écrire une fonction python `nbsolutions(u,p,L)` qui renvoie le nombre de combinaisons optimales distinctes.

Indications pour la question 7 : Les combinaisons d'objets choisis parmi les i premiers sans dépasser le poids total t se rangent en deux catégories :

- Catégorie 1 : les combinaisons qui contiennent l'objet i .
- Catégorie 2 : les combinaisons qui ne contiennent pas l'objet i .

1. Exprimer l'utilité totale maximale des combinaisons de catégorie 1 en fonction de $M(t, i - 1)$
2. Exprimer l'utilité totale maximale des combinaisons de catégorie 2 en fonction de $M(t - p_i, i - 1)$
3. Exprimer alors $M(t, i)$, qui est l'utilité totale maximale des combinaisons des deux catégories réunies. Attention, dans certains cas la catégorie 2 est vide !