

# CCP PC 2010, Mathématiques 1

## Un corrigé.

---

### Partie I

**A)**

- 1) Calculons le polynôme caractéristique de  $A$  (donc aussi de  $f$ ) :

$$P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 4 & -7 \\ -8 & -4-X & 8 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1)(X-4).$$

Ainsi,  $P_f$  est scindé à racines simples, donc  $f$  est diagonalisable.

- 2) L'étude des sous-espaces propres donne :

$$E_0(f) = \text{Vect}(v_1) \text{ avec } v_1 = (1, -2, 0),$$

$$E_1(f) = \text{Vect}(v_2) \text{ avec } v_2 = (1, 0, 1),$$

$$E_4(f) = \text{Vect}(v_3) \text{ avec } v_3 = (1, -1, 0).$$

Dans ce cas, la matrice  $D$  est donnée par :  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

- 3) La formule de changement de base donne :  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ , et donc  $A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$ .

- 4) En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Après calculs, on trouve que la matrice de  $f^m$  dans la base canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^m & 4^m & 1 - 2 \cdot 4^m \\ -2 \cdot 4^m & -4^m & 2 \cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on vérifie que cela redonne  $A$  pour  $m = 1$ .

- 5) Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$  une matrice qui commute avec  $D$ . On écrit que  $MD = DM$ , ce qui donne  $m_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . Donc nécessairement,  $M$  est une matrice diagonale.

Réiproquement, toute matrice diagonale commute avec  $D$  qui est elle-même diagonale.

Finalement,  $M$  les matrices qui commutent avec  $D$  sont les matrices diagonales.

- 6) On a  $HD = DH = H^3$ , donc  $H$  et  $D$  commutent.

- 7) D'après les questions 5) et 6), si  $H^2 = D$ , alors  $H$  est une matrice diagonale. La condition  $H^2 = D$  donne également :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \text{ (ce qui fournit 4 solutions).}$$

Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par  $P \cdot H \cdot P^{-1}$ , où  $H$  est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## B)

- 1) On trouve pour tout entier  $m \geq 1$  :  $J^m = 3^{m-1}J$ .
- 2) Travaillons avec les matrices  $A$  et  $J$ . On a  $A = J + I_3$ . Comme  $J$  et  $I_3$  commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left( \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot 3^{k-1} \right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J.$$

Si on revient aux endomorphismes, cela donne :  $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*, f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j}$ .

Evidemment, cette relation est encore valable pour  $m = 0$  (car dans ce cas, on a  $\text{id} = \text{id}$ ).

- 3) Un calcul du polynôme caractéristique de  $A$  donne :  $P_f(X) = P_A(X) = -(X-1)^2(X-4)$ . Donc  $\boxed{f \text{ admet les deux valeurs propres } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4}$ .

- 4) D'après la question 2), on peut écrire  $f^m = 1^m(\text{id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$  pour tout entier  $m \geq 0$ . En posant  $p = \text{id} - \frac{1}{3}j$  et  $q = \frac{1}{3}j$ , on obtient  $\boxed{\text{l'existence de la décomposition voulue}}$ .

De plus, on a nécessairement  $\text{id} = p + q$  (pour  $m = 0$ ) et  $f = p + 4q$  (pour  $m = 1$ ). Donc  $p = \frac{1}{3}(4\text{id} - f)$  et  $q = \frac{1}{3}(f - \text{id})$ , d'où  $\boxed{\text{l'unicité de cette décomposition}}$ .

Enfin, comme  $\text{id}$  et  $j$  sont deux endomorphismes linéairement indépendants (d'après leur écriture matricielle), il en est de même pour  $p$  et  $q$ .

- 5) On obtient, en utilisant les expressions de  $p$  et  $q$  trouvées à la question précédente :

$$p^2 = p, \quad q^2 = q, \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

Soit maintenant  $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$  tel que  $h^2 = f$ . D'après les relations précédentes, on a

$$h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q.$$

Comme  $(p, q)$  est une famille libre, cette égalité équivaut à  $\alpha^2 = 1$  et  $\beta^2 = 4$ .

Donc il y a 4 endomorphismes  $h$  solutions, donnés par :  $\boxed{h = \pm p \pm 2q}$ .

- 6) On détermine les sous-espaces propres de  $f$  :

$E_1(f) = \text{Vect}(w_1, w_2)$  avec  $w_1 = (1, -1, 0)$  et  $w_2 = (0, 1, -1)$ ,

$E_4(f) = \text{Vect}(w_3)$  avec  $w_3 = (1, 1, 1)$ .

Comme  $\dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ ,  $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ .

Et  $\boxed{(w_1, w_2, w_3)}$  est une base de vecteurs propres pour  $f$ .

Notons  $\mathcal{B}_d = (w_1, w_2, w_3)$ . Alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 7) On peut prendre par exemple :  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 8) Soit  $h$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}_d$  est  $Y$ . Alors  $\boxed{h^2 = f}$  car  $Y^2 = D$ . Et  $\boxed{h \text{ n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q}$ , car  $Y$  n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices (vues précédemment) dans la base  $\mathcal{B}_d$ .
- 9) Soit  $h$  tel que  $h^2 = f$ . Comme  $f$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 1 et 4, le polynôme  $Q_1(X) = (X-1)(X-4)$  est un polynôme annulateur de  $f$ , donc de  $h^2$ .  
Donc le polynôme  $Q_2(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 4) = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$  est un polynôme annulateur de  $h$ . Or ce polynôme est scindé à racines simples, donc d'après le cours,  $\boxed{h \text{ est diagonalisable}}$ .

## Partie II

1) On a, en utilisant les trois relations,  $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu) \text{id} = 0$ . Donc  $(X - \lambda)(X - \mu)$  est un polynôme annulateur de  $f$ , scindé à racines simples. Et  $f$  est diagonalisable.

2) A la question précédente, on a trouvé un polynôme annulateur de  $f$  qui n'a que  $\lambda$  et  $\mu$  comme racines. Il en résulte que  $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda; \mu\}$ .

Si  $\mu$  n'est pas valeur propre de  $f$ , la seule valeur propre est donc  $\lambda$ . Comme  $f$  est diagonalisable, on a donc  $f = \lambda \text{id}$ . En utilisant les deux premières relations de l'énoncé, on a donc :

$$\lambda \text{id} = \lambda p + \mu q = \lambda p + \lambda q.$$

D'où  $(\lambda - \mu)q = 0$ , et comme  $\lambda \neq \mu$ ,  $q = 0$ . Ceci est contraire aux hypothèses ; ainsi  $\mu$  est valeur propre de  $f$ .

On montrerait de même que  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $f$ . Donc  $\text{Sp}(f) = \{\lambda; \mu\}$ .

3) D'après la question 1), on a :  $0 = (f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p$ . Comme  $\lambda \neq \mu$ , on en déduit que  $q \circ p = 0$ .

De même, comme  $(f - \mu \text{id}) \circ (f - \lambda \text{id}) = 0$ , on trouve  $p \circ q = 0$ .

Enfin, comme  $\text{id} = p + q$ , on obtient, en composant par  $p$  (resp. par  $q$ ) :  $p = p^2$  (resp.  $q = q^2$ ).

4) Comme  $\lambda\mu \neq 0$ ,  $f$  n'admet pas la valeur propre 0. Donc  $\text{Ker } f = \{0\}$ , et comme  $E$  est de dimension finie,  $f$  est bijective.

De plus, on a vu en 1) que  $f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu)\text{id} = 0$ . D'où  $f^{-1} = \frac{-1}{\lambda\mu}(f - (\lambda + \mu)\text{id})$ . On remplace  $f$  et  $\text{id}$  à l'aide de  $p$  et  $q$ , ce qui donne finalement :  $f^{-1} = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q$ .

5) La relation  $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$  est vérifiée pour  $m = 0, 1, 2$  d'après l'énoncé, et pour  $m = -1$  d'après la question précédente.

Une démonstration par récurrence sans difficulté, d'une part pour  $m \in \mathbb{N}$ , d'autre part pour  $-m \in \mathbb{N}$ , donne (en utilisant le fait que  $p \circ q = q \circ p = 0$ ) :  $\forall m \in \mathbb{Z}, f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ .

6) Soient deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha p + \beta q = 0$ . En composant par  $p$ , on a  $\alpha p = 0$  donc  $\alpha = 0$  puisque  $p \neq 0$ . De même, en composant par  $q$ , on obtient  $\beta = 0$ .

Donc  $(p, q)$  est une famille libre et  $\dim(F) = 2$ .

7) Soit  $h \in \mathcal{R}(f) \cap F$ . Alors  $h = \alpha p + \beta q$  et comme  $p \circ q = q \circ p = 0$ ,  $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = \lambda p + \mu q$ . Comme  $(p, q)$  est une famille libre, on a  $\alpha^2 = \lambda$  et  $\beta^2 = \mu$ , i.e. (puisque  $\lambda$  et  $\mu$  sont supposés positifs)  $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$  et  $\beta = \pm\sqrt{\mu}$ . On obtient 4 possibilités, qui réciproquement conviennent toutes.

Par conséquent, les 4 solutions sont  $h = \pm\sqrt{\lambda} p \pm \sqrt{\mu} q$ .

8) Définissons la matrice  $K$  diagonale par blocs de la façon suivante :

$$K = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & I_{k-2} \end{array} \right),$$

où  $I_{k-2}$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_{k-2}(\mathbb{R})$  (bien définie car  $k \geq 2$ ).

Alors un produit par blocs donne immédiatement  $K^2 = I_k$ .

9) On va raisonner matriciellement. Appelons  $k$  l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  ( $k \geq 2$ ) et considérons une base de diagonalisation  $\mathcal{B}_d$  pour  $f$  ; c'est également une base de diagonalisation pour  $p$  et  $q$  car  $p = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \text{id})$  et  $q = \frac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda \text{id})$ . De plus, dans la base  $\mathcal{B}_d$ , ces matrices sont définies par blocs comme suit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(f) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda I_k & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{n-k} \end{array} \right), \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \left( \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right) \text{ et } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \left( \begin{array}{c|c} 0_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right).$$

Soit alors  $p'$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}_d$  est :

$$M = \left( \begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right)$$

où la matrice  $K \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  a été définie à la question précédente. De plus,

- un produit par blocs donne  $M^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p)$ , donc  $p'^2 = p$ ;
- des produits par blocs donnent  $M \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) \cdot M = 0_n$ , donc  $p' \circ q = q \circ p' = 0_n$ ;
- comme  $M$  n'est pas diagonale,  $p' \notin F = \text{Vect}(p, q)$ .

En résumé,  $\boxed{\text{l'endomorphisme } p' \text{ ainsi construit répond à la question.}}$

- 10) Si  $\dim(E) \geq 3$ , alors  $\lambda$  ou  $\mu$  est d'ordre au moins 2. Supposons par exemple que c'est  $\lambda$ . Posons  $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$ , où  $p'$  est l'endomorphisme défini à la question précédente. On a  $h^2 = \lambda p' + \mu q = f$  par propriétés de  $p'$  et  $q$ , et pourtant  $h \notin F$  car  $p' \notin F$  et  $\lambda \neq 0$ .

En conclusion,  $\boxed{\mathcal{R}(f) \notin F}$ .

### Partie III

- 1) Pour tout  $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda_i^k \right) p_i = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

- 2) Prenons  $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ . Alors  $P(\lambda_i) = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ , et d'après la question précédente  $P(f) = 0$ . Le polynôme  $P$  est annulateur de  $f$  et il est scindé à racines simples. Donc  $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ .

- 3) D'après la question 1),  $L_{\ell}(f) = \sum_{i=1}^m L_{\ell}(\lambda_i) p_i$ . Mais  $L_{\ell}(\lambda_i) = \delta_{\ell,i}$  (où  $\delta_{\ell,i} = 1$  si  $\ell = i$  et 0 si  $\ell \neq i$ ). Donc  $\boxed{L_{\ell}(f) = p_{\ell}}$ . De plus,

$$(f - \lambda_{\ell} \text{id}) \circ p_{\ell} = (f - \lambda_{\ell} \text{id}) \circ L_{\ell}(f) = \frac{\prod_{i=1}^m (f - \lambda_i \text{id})}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} (\lambda_{\ell} - \lambda_i)} = \frac{0}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} (\lambda_{\ell} - \lambda_i)} = 0.$$

Il en résulte que  $\boxed{\text{Im}(p_{\ell}) \subset \text{Ker}(f - \lambda_{\ell} \text{id})}$ .

En outre, le polynôme  $P(X)$  de la question 2) est annulateur de  $f$  et a pour racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Donc  $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Et par hypothèse, pour tout  $1 \leq \ell \leq m$ ,  $p_{\ell} \neq 0$  donc  $\text{Im}(p_{\ell}) \neq \{0_E\}$  et  $\text{Ker}(f - \lambda_{\ell} \text{id}) \neq \{0_E\}$ . Ceci signifie que  $\lambda_{\ell}$  est effectivement une valeur propre de  $f$ .

Finalement, on a bien  $\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}}$ .

- 4) Comme  $p_{\ell}(f) = L_{\ell}(f)$ ,  $p_i \circ p_j = (L_i \cdot L_j)(j)$ .

- Si  $i \neq j$ , le polynôme  $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$  divise  $(L_i \cdot L_j)(X)$ . Comme  $P(f) = 0$ , on a donc  $(L_i \cdot L_j)(f) = 0$  et  $\boxed{p_i \circ p_j = 0}$ .

- Si  $i = j$ , comme  $\text{id} = \sum_{k=1}^m p_i$  (relation de l'énoncé pour  $k = 0$ ), en composant par  $p_i$  on obtient  $\boxed{p_i^2 = p_i}$ .

- 5) L'endomorphisme  $f$  étant diagonalisable, d'après le cours on a  $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})}$ .

Le fait que chaque  $p_i$  est un projecteur a été démontré à la question précédente. De plus, comme

$\text{id} = \sum_{k=1}^m p_i$ , on a  $E = \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$ . Or on a vu que  $\text{Im}(p_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$ . D'après la somme directe précédente, on a donc  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$  et  $\text{Im}(p_i) = E_{\lambda_i}(f)$  pour tout  $i$ . Enfin le fait que  $p_i \circ p_j = 0$  pour  $i \neq j$  montre que  $\boxed{\text{les } p_i \text{ sont les projecteurs associés à cette somme directe}}$ .

- 6) Ecrivons une combinaison linéaire nulle des  $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$  :  $\sum_{i=1}^m a_i p_i = 0$ . Soit  $\ell \in \llbracket 1; m \rrbracket$ . En composant par  $p_\ell$ , on obtient  $a_\ell p_\ell = 0$ , d'où  $a_\ell = 0$  car  $p_\ell$  n'est pas nul d'après l'énoncé. Ainsi tous les coefficients  $a_i$  sont nuls et la famille  $(p_1, \dots, p_m)$  est libre. Donc  $\boxed{\dim(F) = m}$ .
- 7) Soit  $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \in F$  telle que  $h^2 = f$ . Alors  $h^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 p_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$  et comme la famille  $(p_1, \dots, p_m)$  est libre,  $\alpha_i^2 = \lambda_i$  pour tout  $i$ . Réciproquement, tous les  $h$  vérifiant cette relation sont solutions. En résumé,  $\boxed{\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{ \sum_{i=1}^m \pm \sqrt{\lambda_i} p_i \right\}}$ .

- 8) a) Si  $m = n$ , il y a  $n$  sous-espaces propres dans l'espace  $E$  de dimension  $n$ .  
Donc  $\boxed{\text{la dimension de chaque sous-espace propre de } f \text{ est égale à } 1}$ .
- b) Si  $h \in \mathcal{R}(f)$ ,  $h \circ f = h^3 = f \circ h$ . Donc  $h$  et  $f$  commutent et d'après le cours, tout espace propre  $E_{\lambda_i}(f)$  est stable par  $h$ . Soit  $x$  un vecteur propre de  $f$ , par exemple  $x \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$ . Comme  $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$ ,  $h(x) = \mu_i x$  et  $\boxed{x \text{ est vecteur propre pour } h}$ .
- c) Soit  $h \in \mathcal{R}(f)$ . D'après la question précédente, pour tout  $1 \leq i \leq m$ , il existe  $\mu_i \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ ,  $h(x_i) = \mu_i x_i$ .

Soit  $x \in E$ . Comme  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f)$ ,  $x = x_1 + \dots + x_n$  avec  $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$  et

$$h(x) = h(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(x)$$

soit  $h = \sum_{i=1}^m \mu_i p_i$ . Donc  $\boxed{\mathcal{R}(f) \subset F}$ .

En reprenant la question III.7), on voit qu'une condition nécessaire et suffisante sur les  $\lambda_i$  pour que  $\mathcal{R}(f)$  soit non vide est :  $\boxed{\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i \geq 0}$ .

- 9) Si  $m < n$ , alors il existe  $i$  tel que  $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq 2$ . Si les  $\lambda_i$  sont positifs ou nuls, on peut alors reprendre le même raisonnement qu'à la question II.10), qui montre que  $\boxed{\mathcal{R}(f) \not\subset F}$ .

## Partie IV

### A)

- 1) Soit  $x \in E$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0_E$  et  $(a_1, \dots, a_p)$  une famille de réels tels que  $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0$ . En composant par  $f^{p-1}$ , comme  $f^q = 0$  pour tout  $q \geq p$ , on obtient  $a_0 f^{p-1}(x) = 0$  donc  $a_0 = 0$ . On recommence en composant par  $f^{p-2}, \dots, f$ , ce qui donne au final  $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$ . Donc  $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre}}$ . Cette famille a  $p$  éléments dans un espace de dimension  $n$ , donc  $\boxed{p \leq n}$  et  $\boxed{f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0}$ .
- 2) Si  $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ , soit  $h \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $h^2 = f$ . Alors  $h^{2n} = f^n = 0$  donc  $h$  est nilpotent et d'après 1),  $h^n = 0$ . De plus,  $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$  donc  $2p-2 \leq n-1$ , i.e.  $\boxed{2p-1 \leq n}$ .

3) On sait d'après le cours que pour  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,

$$\forall x \in ]-1; 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + O(x^n)$$

au voisinage de 0. Ici,  $\alpha = \frac{1}{2}$  et pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $a_k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$ .

4) D'après la question précédente, pour  $-1 < x < 1$ ,  $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \gamma(x)$  où  $\gamma$  est une fonction bornée au voisinage de 0. En éllevant au carré, cela donne  $1+x = (P_n(x) + x^n \gamma(x))^2 = P_n^2(x) + x^n(2P_n(x)\gamma(x) + x^n\gamma(x)^2) = P_n^2(x) + x^n\eta(x)$  pour une fonction  $\eta$  bornée au voisinage de 0.

Posons alors  $Q_n(x) = P_n^2(x) - x - 1$ ; c'est une fonction polynôme. D'après la relation précédente,  $x \mapsto Q_n(x)/x^n$  est une fonction bornée au voisinage de 0. Ceci n'est possible que si  $Q_n(X)$  n'admet pas de terme en  $X^k$  pour  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , ce qui entraîne  $X^n$  divise  $Q_n(X)$ .

On écrira dans la suite  $Q_n(X) = X^n \cdot S_n(X)$  où  $S_n$  est une fonction polynôme.

- 5) • D'après les résultats des questions précédentes,  $(P_n(f))^2 - f - \text{id} = (P_n^2)(f) - f - \text{id} = f^n \circ S_n(f)$ . Or  $f^n = 0$  d'après 1), donc  $(P_n(f))^2 = f + \text{id}$ , i.e.  $P_n(f) \in \mathcal{R}(f + \text{id})$ . Donc  $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$ .
- Plus généralement,  $(P_n(\alpha f))^2 - \alpha f - \text{id} = (P_n^2)(\alpha f) - \alpha f - \text{id} = (\alpha f)^n \circ S_n(\alpha f)$ . Comme  $f^n = 0$ ,  $(P_n(\alpha f))^2 = \alpha f + \text{id}$ , i.e.  $P_n(\alpha f) \in \mathcal{R}(\alpha f + \text{id})$ . Donc  $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$ .
  - Comme  $\beta \neq 0$ , soit  $h \in \mathcal{R}(\frac{1}{\beta}f + \text{id})$  (c'est possible d'après ce qui précède). Alors  $h^2 = \frac{1}{\beta}f + \text{id}$  et comme  $\beta > 0$ ,  $(\sqrt{\beta}h)^2 = f + \beta\text{id}$ . Donc  $\sqrt{\beta}h \in \mathcal{R}(f + \beta\text{id})$  et  $\mathcal{R}(f + \beta\text{id}) \neq \emptyset$ .

B)

1) La matrice  $T - \lambda I_n$  est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale; il en résulte que  $\text{rg}(T - \lambda I_n) \leq n-1$ . Un calcul matriciel simple montre que  $\text{rg}((T - \lambda I_n)^k) \leq n-k$  pour  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$  et en particulier pour  $k = n$ :  $\text{rg}((T - \lambda I_n)^n) = 0$ , i.e.  $(T - \lambda I_n)^n = 0$ .

Remarquons que cette question peut se traiter directement en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, mais que ce théorème est hors programme en PC.

- 2) Comme  $f$  est un endomorphisme de  $E$  dont le polynôme caractéristique est scindé, il est trigonalisable. De plus, comme  $f$  n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda$ , il existe une base dans laquelle la matrice  $T$  de  $f$  est triangulaire supérieure, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel  $\lambda$ . D'après la question précédente,  $(T - \lambda I_n)^n = 0_n$  et  $(f - \lambda \text{id})^n = 0$ . Donc  $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n$ .
- 3) D'après la partie A), comme  $(f - \lambda \text{id})^n = 0$ ,  $\mathcal{R}((f - \lambda \text{id}) + \lambda \text{id}) \neq \emptyset$  (question A)5) en prenant  $\beta = \lambda$  et en remplaçant  $f$  par  $f - \lambda \text{id}$ ). Donc  $\text{si } \lambda > 0 \text{ alors } \mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ .