Une proposition du corrigée de maths 1 du concours centrale PC – 2015
Par Mohammed Icheha ; Professeur en (PSI)

I-Première partie

I.A) Soit $F = vect(u); u \neq 0$ une droite

$\Rightarrow$) On a $u \in F$ et par hypothèse Fest stable par f ; donc $f(u) \in F$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}: f(u) = \lambda u$. Ainsi u est un vecteur propre de f.

$\Leftarrow$) si u est un vecteur propre de f ; alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}: f(u) = \lambda u$. Soit $x \in vect(u)$, $\exists \propto \in \mathbb{K}: x = \propto u$; donc $f(x) = f(\propto u) = \propto f(u) = \propto \lambda u \in vect(u)$; ainsi la droite $F = vect(u)$ est stable par f.

I.B.1) ■ On a $\{0\}$ *et* E sont des s-e-v stables par f et par hypothèse $E \neq \{0\}$; il existe donc au moins deux s-e-v stables par f.

■Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de f ; $\chi_{\mathrm{f}} = \mathrm{X}^2 + 1$ n'a pas de racines réels ; donc f n'a pas de valeurs propres et donc n'a pas de vecteurs propres. On conclut alors par I.A) qu'il n'existe pas de droites stables par$f$. Il ne reste donc que les deux s-e-v $\{0\}$ et E qui sont stables par$f$.On conclut qu'il n'y a que deux s-e-v stables par f.

I.B.2) ■On a $\{0\}$; $Ker(f)$ et E sont des s-e-v stables par f et comme $\begin{cases} \mathrm{f} \neq 0 \\ \mathrm{f\ est\ non\ injective} \end{cases}$, alors $\begin{cases} \mathrm{Ker(f)} \neq \mathrm{E} \\ \mathrm{Ker(f)} \neq \{0\} \end{cases}$. Ainsi, on a au moins trois s-e-v stables par f: $\{0\}$, $Ker(f)$ et E.

■Si n est impair : On a $\{0\}$; $Ker(f)$, $Im(f)$ et E sont des s-e-v stables par f et on vient de voir que les s-e-v $\{0\}$; $Ker(f)$ et E sont deux à deux distincts. On a $\mathrm{f} \neq 0$, donc $\mathrm{Im(f)} \neq \{0\}$, de plus $\mathrm{Im(f)} \neq \mathrm{E}$, car sinon f sera surjective donc injective (car on est en dimension finie) ce qui n'est pas le cas. D'autre part, puisque, par hypothèse n est impair, alors d'après le théorème du rang : $\mathrm{dimKer(f)} + \mathrm{dimIm(f)} = \mathrm{dimE} = \mathrm{n}$, les entiers $\mathrm{dimKer(f)}$ et $\mathrm{dimIm(f)}$ sont de parités différentes et donc $\mathrm{Ker(f)} \neq \mathrm{Im(f)}$. On conclut alors qu'il y a au moins quatre s-e-v stables par f ; à savoir : $\{0\}$; $er(f)$, $Im(f)$ et E

■ Soit $\mathcal{B}$= $(e_1; e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que : $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{f}) = \{0\}$; le s-e-v propre associé est $\mathrm{E}_0(\mathrm{f}) = \mathrm{Vect(e_1)}$ qui est donc l'unique droite stable par f.Ainsi ; il n'existe que trois s-e-v stables par f qui sont : $\{0\}$; $\mathrm{Vect(e_1)}$ *et* E

I.C.1) Soit $F = Vect(e_i)_{i \in I}$où $(e_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres de f.On a :
$f(F) = f(Vect(e_i)_{i \in I}) = Vect(f(e_i))_{i \in I} \subset Vect(e_i)_{i \in I} = F$; Ainsi F est stable par$f$.
Si $F = E_\lambda(f)$ est le s-e-v propre associé à la valeur propre λ ; alors Fest stable par f et l'endomorphisme induit par f sur F est $f_F = \lambda\, Id_F$.

I.C.2) Par hypothèse ; $f$admet un s-e propre $E_\lambda(f)$ de dimension supérieure ou égale à 2.Il existe donc des vecteurs $e_1; e_2$ de $E_\lambda(f)$ formant une famille libre.
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$; *on a* $e_1 + \alpha e_2 \neq 0$; par suite $D_\alpha = Vect(e_1 + \alpha e_2)$ est une droite de E qui est stable par f, puisqu'il est engendré par un vecteur propre.
Pour $\alpha; \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha \neq \beta$; on a $D_\alpha \neq D_\beta$. En effet ; on a :

$$D_\alpha = D_\beta \implies \exists \mu \in \mathbb{K} : e_1 + \alpha e_2 = \mu(e_1 + \beta e_2) \underset{par\ libert\acute{e}\, de\,(e_1;e_2)}{\implies} (\mu = 1\ et\ \alpha = \mu\beta) \implies \alpha = \beta$$

Comme $\mathbb{K}$ est infini ; on conclut qu'il existe une infinité de droites stables par f.

I.C.3) Pour tout $x \in E - \{0\}$; la droite $Vect(x)$ est, selon l'hypothèse, stable par f . Il existe donc $\lambda_x \in \mathbb{K} : f(x) = \lambda_x x$.
Soit $x, y \in E - \{0\}$.
■Si (x, y) est libre ; on a $x + y \neq 0$ et donc $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ ou encore $f(x) + f(y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ qui n'est autre que $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y$ qui, par liberté de (x, y) ; donne $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$
■Si (x, y) est liée, alors $\exists \mu \in \mathbb{K} : y = \mu x \ (car\ x \neq 0)$; donc : $\lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x \mu x = \lambda_x y$; ainsi $\lambda_y = \lambda_x$; $(y \neq 0)$
On conclut qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, valeur commune des λ_x tel que $\forall x \in E - \{0\} : f(x) = \lambda x$; relation qui est vraie aussi pour $x = 0$. On conclut que f est une homothétie.

I.D.1) f est par hypothèse diagonalisable ; donc E admet une base $\mathcal{B} = (e_1; \dots; e_n)$ formée de vecteurs propres de f.
Soit F un s-e-v de E.
Si $F = \{0\}\ (resp.\ F = E)$; alors $F = E\ (resp. F = \{0\})$ est un supplémentaire de F stable par f.
Si Fest non nul et distinct de E ; soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1; ..; \varepsilon_p)$ une base de F.D'après le théorème de la base incomplète ; on peut trouver des vecteurs $\varepsilon_{p+1}; ..; \varepsilon_n$ choisis parmi les vecteurs $e_1; \dots; e_n$ tels que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1; ..; \varepsilon_p; \varepsilon_{p+1}; ..; \varepsilon_n)$ soit une base de E.Alors $G = Vect(\varepsilon_{p+1}; ..; \varepsilon_n)$ est un supplémentaire de F dans E qui est stable par$f$puisqu'il est engendré par une famille de vecteurs propres de $f\ (cf\ I.C1)$

I.D.2) On a $f$est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-e-v non nul ; donc $f$admet au moins une valeur propre. Soit alors $e_1$un vecteur propre associé. Puisque $Vect(e_1)$ est stable par f ; alors selon l'hypothèse ; il existe H_1 s-e-v stable par f tel que $E = vect(e_1) \oplus H_1$.
Supposons que pour $k \in \{1; \dots; n - 1\}$; il existe k- vecteurs propres $e_1; \dots; e_k$ formant une famille libre et un s-e-v H_k stable par f tels que $E = vect(e_1; ..; e_k) \oplus H_k$ .On a alors $dim H_k = dim E - \dim(vec\ (e_1; ..; e_k)) = n - k \geq 1$. H_k est donc un $\mathbb{C}$-e-v non nul et qui est stable par f ; donc l'endomorphisme induit par f sur H_k admet une valeur propre et alors f admet un vecteur propre $e_{k+1} \in H_k - \{0\}$ et puisque la somme $vect(e_1; ..; e_k) + H_k$ est directe et que $(e_1; ..; e_k)$ est libre, alors $(e_1; ..; e_k; e_{k+1})$ est aussi libre. Le s-e-v $Vect(e_1; ..; e_k; e_{k+1})$ est stable par f car il est engendré par une famille de vecteurs propres de f ; il admet donc par hypothèse un supplémentaire H_{k+1} stable par f. On a ainsi montré par récurrence que pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$; il existe k- vecteurs propres $e_1; \dots; e_k$ formant une famille libre et un s-e-v H_k de E stable par f tels que $E = vect(e_1; ..; e_k) \oplus H_k$. En particulier ; il existe une famille libre $(e_1; ..; e_n)$ formée de vecteurs propres de f telle que $E = vect(e_1; ..; e_n)$; (car dans ce cas $H_n = \{0\}$) ; alors $\mathcal{B} = (e_1; ..; e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f. Ainsi f est diagonalisable.
■Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; le résultat ci-dessus peut tomber en défaut : Reprenons l'exemple de la question I.B.1). Les seuls s-e-v stables par $f$sont $\{0\}$ et E;chacun d'eux admet évidemment un supplémentaire stable par f ; mais f n'est pas diagonalisable puisque son polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

II-Deuxième partie

II.A.1) Soit $x \in F$. Comme $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p}(F \cap E_i)$; alors x s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $x_i \in F \cap E_i$; on a alors : $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ qui est bien dans $\bigoplus_{1 \leq i \leq p}(F \cap E_i) = F$; (car $x_i \in F \cap E_i \implies \lambda_i x_i \in F \cap E_i$).Ainsi F est stable par f.

II.A.2) On a $x \in F\ et\ F \subset\ E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$; alors $\exists! \left(x_1; \dots; x_p\right) \in \prod_{i=1}^{p} E_i : x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

II.A.3) On a $\mathcal{B}_{\mathrm{x}}$ est une famille génératrice de $\mathrm{V_x}$ et c'est une famille libre puisqu' elle est formée de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes; donc c'est une base de $\mathrm{V_x}$.

II.A.4) On a $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$; donc, pour $j \in \{1; \dots ; \mathrm{r}\}$: $\mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x}_1) + \cdots . + \mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x}_\mathrm{r}) = \lambda_1^{\mathrm{j}-1}\mathrm{x}_1 + \cdots + \lambda_\mathrm{r}^{\mathrm{j}-1}\mathrm{x}_\mathrm{r}$ qui est bien dans $\mathrm{V_x} = \mathrm{vect}(\mathrm{x}_1 : \dots ; \mathrm{x}_\mathrm{r})$; de plus, ce calcul montre que :

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_\mathrm{x}}\left(\left(\mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x})\right)_{1\leq j\leq r}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{\mathrm{r}-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{\mathrm{r}-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_\mathrm{r} & \dots & \lambda_\mathrm{r}^{\mathrm{r}-1} \end{pmatrix}$$

II.A.5) $\left(\mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x})\right)_{1\leq j\leq r}$ est une famille d'éléments de $\mathrm{V_x}$ et le déterminant de sa matrice dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{x}$ est un déterminant de Vandermonde qui vaut $\prod_{1\leq i<j\leq r} (\lambda_\mathrm{j} - \lambda_\mathrm{i})$; qui est non nul, puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Donc la famille $\left(\mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x})\right)_{1\leq j\leq r}$ est une base de $\mathrm{V_x}$.

<u>**Autre Méthode**</u> : Montrons par une autre méthode que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{\mathrm{r}-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{\mathrm{r}-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_\mathrm{r} & \dots & \lambda_\mathrm{r}^{\mathrm{r}-1} \end{pmatrix}$ est inversible sans savoir l'expression de son déterminant.

D'abord, V est une matrice carrée. Montrons que la famille de ses colonnes forme une famille libre :

Soit $\alpha_0; \alpha_1; \dots ; \alpha_{\mathrm{r}-1} \in \mathbb{K}$ tels que : $\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{r}-1} \alpha_\mathrm{i} \begin{pmatrix} \lambda_1^\mathrm{i} \\ \lambda_2^\mathrm{i} \\ \vdots \\ \lambda_\mathrm{r}^\mathrm{i} \end{pmatrix} = 0.$; on a donc, pour tout $k \in \{1; \dots ; \mathrm{r}\}$

$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{r}-1} \alpha_\mathrm{i}\, \lambda_\mathrm{k}^\mathrm{i} = 0$; Ainsi, pour tout $k \in \{1; \dots ; \mathrm{r}\}$, λ_k est racine du polynome $P = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{r}-1} \alpha_\mathrm{i}\, \mathrm{X}^\mathrm{i}$; donc, P admet, au moins r racines, et comme $\mathrm{d^o P} < r$; alors $P = 0$; ainsi, pour tout $i \in \{0; \dots ; \mathrm{r}-1\}$; $\alpha_\mathrm{i} = 0$. Donc la famille des colonnes de V est libre. On conclut que V est inversible.

II.A.6) Pour $i \in \{1; \dots ; \mathrm{r}\}$; on a $\mathrm{x_i} \in \mathrm{V_x} = \mathrm{Vect}(\left(\mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x})\right)_{1\leq j\leq r})$. Or $\mathrm{f}^{\mathrm{j}-1}(\mathrm{x}) \in \mathrm{F}$, puisque $x \in \mathrm{F}$ et F est stable par f ; ainsi $\mathrm{x_i} \in \mathrm{F}$, alors $\mathrm{x_i} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{E_i}$; par suite $\underbrace{\sum_{i=1}^{r} x_i}_{x} \in \bigoplus_{1\leq i\leq r}(\mathrm{F}\cap\mathrm{E_i})$ et donc $x \in \bigoplus_{1\leq i\leq p}(\mathrm{F}\cap\mathrm{E_i})$, ceci pour tout $x \in \mathrm{F} - \{0\}$; résultat qui est vraie aussi pour $x = 0$; donc $F \subset \bigoplus_{1\leq i\leq p}(\mathrm{F}\cap\mathrm{E_i})$ .Pour l'autre inclusion ; il découle du fait que les $\mathrm{F}\cap\mathrm{E_i}$ sont des s-e-v de F .On en déduit que $F = \bigoplus_{1\leq i\leq p}(\mathrm{F}\cap\mathrm{E_i})$.

II.B.1) Comme $p = n$; alors les valeurs propres de f sont simples ; donc pour tout $i \in \{1; \dots ; \mathrm{n}\}$; $dimE_i = 1$

II.B.2) Soit $F = Vect(u)$, $u \neq 0$, une droite stable par f. Alors d'après I.A) ; u est un vecteur propre de f, donc $\exists i \in \{1; \dots ; \mathrm{n}\}$; $\mathrm{u} \in \mathrm{E_i}$; ainsi $F \subset \mathrm{E_i}$ et comme ils ont même dimension alors $F = \mathrm{E_i}$. Réciproquement ; pour tout $i \in \{1; \dots ; \mathrm{n}\}$; $\mathrm{E_i}$ est une droite stable par f ; de plus, pour $i \neq j$; on a $\mathrm{E_i} \neq \mathrm{E_j}$ .On conclut qu'il existe exactement n droites stables par$f$, à savoir les $\mathrm{E_i}$; $i \in \{1; \dots ; \mathrm{n}\}$

II.B.3) Soit F un s-e-v stable par f tel que $\mathrm{dimF} = \mathrm{k} \in \{2; \dots ; n-1\}$. D'après II.A) : $F = \bigoplus_{1\leq i\leq p} \mathrm{F}\cap\mathrm{E_i}$

donc $\dim F = k = \sum_{i=1}^{n} \dim(F \cap E_i)$. Comme pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $\dim(F \cap E_i) \in \{0; 1\}$; alors il existe une partie I de $\{1; \dots; n\}$, à k éléments tels que $\forall i \in I$; $\dim(F \cap E_i) = 1$ et $\forall i \notin I$; $\dim(F \cap E_i) = 0$ .Or pour $i \in I$; $\dim(F \cap E_i) = 1 = \dim E_i$ et $F \cap E_i \subset E_i$; donc $F \cap E_i = E_i$ et pour $i \notin I$; on a $F \cap E_i = \{0\}$; ainsi $F = \underset{i\in I}{\oplus} E_i$. Réciproquement ; il est clair que si F est de cette forme ; alors F est stable par f et $\dim F = k$. De plus ; si I et I'sont des parties distincts de $\{1; \dots; n\}$ à k-éléments; alors $\underset{i\in I}{\oplus} E_i \neq \underset{i\in I'}{\oplus} E_i$; On conclut que le nombre de s-e-v F stables par f tels que $\dim F = k$ est égale au nombre de parties I à k éléments de $\{1; \dots; n\}$, à savoir C_n^k.

II.B.4) On remarque que le résultat établie à la question précédente reste valable pour tout entier k tel que $k \in \{0; \dots; n\}$; Ainsi le nombre des sous espaces stables est $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Ces sous espaces sont les $F_I = \underset{i\in I}{\oplus} E_i$ où I est une partie quelconque de $\{1; \dots; n\}$ avec la convention $\underset{i\in \emptyset}{\oplus} E_i = \{0\}$.

III-Troisième partie

III.A.1) Notons $\mathcal{B} = (1; X; \dots; X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
On a $D(1) = 0$ et $\forall k \in \{1; \dots; n\}$; $D(X^k) = kX^{k-1}$.Ainsi $\forall k \in \{0; \dots; n\}$; $D(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$. D étant linéaire ; donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D ; et alors D induit un endomorphisme D_n sur $\mathbb{K}_n[X]$; et ce calcul montre que : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(D_n) = A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

III.A.2) a) Notons $dimF = q$; $F \neq \{0\}$
Posons $I = \{d^0P \ ; P \in F - \{0\}\}$: on a I est non vide car F est non nul (hypothèse) et $I \subset \mathbb{N}$.
Supposons que I est infinie. Alors ; il existe $P_1; \dots; P_{q+1} \in F - \{0\}$ tels que $d^oP_1 < \cdots < d^oP_{q+1}$. $(P_1; \dots; P_{q+1})$ est une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts ; donc elle est libre ; et puisqu'ielle est à $q + 1$ éléments, alors $q + 1 \leq dimF = q$; ce qui est faux .On conclut donc que I est fini et par suite I admet un plus grand élément $n \in \mathbb{N}$; et alors, il existe $R \in F$ tel que $d^0R = n$ et, tout élément P de F vérifie $d^oP \leq n$, résultat qui montre que $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

b) Puisque Fest stable par D et $R \in F$; alors pour tout $i \in \{0; \dots; n\}$; $D^i(R) \in F$. Or pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$: $n \geq d^o\left(D^{i-1}(R)\right) > d^o\left(D^i(R)\right) = d^o(R) - i = n - i \geq 0$. Ainsi $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$est une famille de polynômes non nuls de F de degrés deux à deux distincts ; elle est donc libre de F.

c) De a) et b) ; on déduit que $Vect(D^i(R))_{0\leq i\leq n}) \subset F \subset \mathbb{K}_n[X]$.Or $\dim\left(Vect(D^i(R))_{0\leq i\leq n})\right) = n + 1$ $= \dim(\mathbb{K}_n[X])$; Donc $Vect(D^i(R))_{0\leq i\leq n}) = \mathbb{K}_n[X]$. On conclut que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3) Soit Fun s-e-v de E stable par D ; autre que $\{0\}$.
■Si F est de dimension finie ; on vient de voir qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ $tel\ que$ $F = \mathbb{K}_n[X]$.Réciproquement, un tel s-e-v- est ; d'après III.A1) ; stable par D.
■Si Fest de dimension infinie. Soit $P \in \mathbb{K}[X] - \{0\}$; posons $d^oP = q$. On a $F \not\subset \mathbb{K}_q[X]$ (sinon ; F sera de dimension finie ce qui n'est pas le cas) donc ; il existe $R \in F$ tel que $n = d^oR > q$. La démonstration faite en **III.A.2) b)** montre que $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts ; donc elle est libre ; de plus son nombre d'éléments est égale à $n + 1 = dim\mathbb{K}_n[X]$; alors c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On a donc $\mathbb{K}_n[X] =$

$Vect\left(\mathrm{D}^{\mathrm{i}}(\mathrm{R})\right)_{0\leq i\leq n}) \underset{\text{car } R\in F \text{ et } F \text{ stable par } D}{\subset}$ F. Comme $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}\mathrm{P} = \mathrm{q} < n$; alors $P \in \mathbb{K}_{\mathrm{n}}[\mathrm{X}]$ et par suite $P \in F$; ceci pour tout $P \in \mathbb{K}[X] - \{0\}$; résultat qui vaut aussi pour $P = 0$. On conclut que $F = \mathbb{K}[X]$
Réciproquement ; $\mathbb{K}[X]$ est un s-e-v stable par D.
En conclusion ; les s-e-v stables par D sont : $\{0\}$; $\mathbb{K}[X]$ et les $\mathbb{K}_{\mathrm{n}}[\mathrm{X}]$; $(n \in \mathbb{N})$.

III.B.1) Si la famille $\mathcal{B}_{\mathrm{f,u}} = ((\mathrm{f}^{\mathrm{n-i}}(\mathrm{u}))_{1\leq i\leq n}$ est une base de E ; alors $\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}) \neq 0$. Réciproquement ; Soit u un vecteur de E tell que $\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}) \neq 0$. Supposons que la famille $\mathcal{B}_{\mathrm{f,u}}$ est liée ; alors, il existe $\alpha_1; \dots ; \alpha_{\mathrm{n}} \in \mathbb{K}$; non tous nuls tels que : $\alpha_1\, \mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}) + \cdots \dots + \alpha_{\mathrm{n}}\mathrm{u} = 0.$ (*)
Soit k le plus grand entier tel que $\alpha_{\mathrm{k}} \neq 0$; alors $\alpha_{\mathrm{i}} = 0$ pour tout $i > k$ et (*) s'écrit :
$\alpha_1\, \mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}) + \cdots \dots + \alpha_{\mathrm{k}}\, \mathrm{f}^{\mathrm{n-k}}(\mathrm{u}) = 0$. Composons par $\mathrm{f}^{\mathrm{n+k}-1}$ et utilisons le fait que $\mathrm{f}^{\mathrm{p}} = 0, \forall \mathrm{p} \geq \mathrm{n}$; on aura $\alpha_{\mathrm{k}}\, \mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}) = 0$ et alors $\alpha_{\mathrm{k}} = 0$ ce qui est absurde. On conclut que la famille $\mathcal{B}_{\mathrm{f,u}}$ est libre et puisque son nombre d'éléments est $\mathrm{n} = \dim \mathrm{E}$; alors c'est une base de E.
En conclusion ; les vecteurs u de E tels que $\mathcal{B}_{\mathrm{f,u}}$ est une base de E sont ceux qui vérifient $\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}) \neq 0$. De tels vecteurs existent car $\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1} \neq 0$.

III.B.2) On a : $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}_{\mathrm{f,u}}}(\mathrm{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

III.B.3) On a $\mathcal{B}_{\mathrm{f,u}} = ((\mathrm{f}^{\mathrm{n-i}}(\mathrm{u}))_{1\leq i\leq n}$. Posons $\mathrm{e}_{\mathrm{i}} = (\mathrm{i}-1)!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n-i}}(\mathrm{u})$; $(1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n})$ et $\mathcal{C} = (e_1; \dots ; e_n)$
■ Il est clair que $\mathcal{C}$ est une base de E
■ Si $i = 1$; On a : $\mathrm{e}_1 = (0)!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}) = \mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u})$; donc $f(e_1) = 0$
■ Si $2 \leq i \leq n$; On a :
$f(e_i) = f\left((\mathrm{i}-1)!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n-i}}(\mathrm{u})\right) = (\mathrm{i}-1)!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n}+1-\mathrm{i}}(\mathrm{u}) = (\mathrm{i}-1)\left((\mathrm{i}-2)!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n}-(\mathrm{i}-1)}(\mathrm{u})\right) = (\mathrm{i}-1)\mathrm{e}_{\mathrm{i}-1}$
Ainsi : $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{C}}(\mathrm{f}) = \mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}$.

III.B.4) Soit $\mathcal{C} = (e_1; \dots ; e_n)$ la base introduite dans la question précédente et $\mathcal{B} = (1; X; \dots ; X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{K}_{\mathrm{n}-1}[\mathrm{X}]$. Soit φ l'isomorphisme : $\begin{cases} \quad E \to \mathbb{K}_{\mathrm{n}-1}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{x} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{i}}\mathrm{e}_{\mathrm{i}} \to \varphi(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{i}}\mathrm{X}^{\mathrm{i}-1} \end{cases}$
■$\forall x \in E$; on a : $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{C}}(\mathrm{x}) = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathrm{x}))$ et donc :
$$\begin{aligned}\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{D}(\varphi(\mathrm{x}))) &= \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{D})\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathrm{x})) = \mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{x}) = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{C}}(\mathrm{f})\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{C}}(\mathrm{x}) = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{C}}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) \\ &= \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathrm{f}(\mathrm{x}))).\end{aligned}$$
Ainsi $\mathrm{D}(\varphi(\mathrm{x})) = \varphi(\mathrm{f}(\mathrm{x}))$; (*).
Soit F un s-e-v de E stable par f, alors $\varphi(\mathrm{F})$ est un s-e-v de $\mathbb{K}_{\mathrm{n}-1}[\mathrm{X}]$; de plus :
$\mathrm{D}(\varphi(\mathrm{F})) \underbrace{=}_{(\text{d'après } (*)} \varphi(\mathrm{f}(\mathrm{F})) \underbrace{\subset}_{\text{F est stable par f}} \varphi(\mathrm{F})$, Ainsi $\varphi(\mathrm{F})$ est stable par D et alors, selon III.A.3) :
$\varphi(\mathrm{F}) = \{0\}$ ou $\varphi(\mathrm{F}) = \mathbb{K}_{\mathrm{p}}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(1; X; \dots ; X^p)$; $(0 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{n}-1)$
Puisque $\varphi(\mathrm{e}_{\mathrm{i}}) = \mathrm{X}^{\mathrm{i}-1}$; alors, en appliquant φ^{-1}; on obtient :
$\mathrm{F} = \{0\}$ ou $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1; \dots ; e_{p+1})$; $(0 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{n}-1)$
Réciproquement; ces s-e-v sont stables par f car, $f(e_1) = 0$ *et si* $2 \leq i \leq n$; $f(e_i) = (\mathrm{i}-1)\mathrm{e}_{\mathrm{i}-1}$.
Comme $\mathrm{e}_{\mathrm{i}} = (\mathrm{i}-1)!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n-i}}(\mathrm{u})$; on conclut que les s-e-v de E stables par f sont : $\mathrm{F}_0 = \{0\}$ et les F_{k} ; $\mathrm{k} \in \{1; \dots ; \mathrm{n}\}$ avec :
$\mathrm{F}_{\mathrm{k}} = \mathrm{Vect}(\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}); 1!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n}-2}(\mathrm{u}); \dots \dots ; (\mathrm{k}-1)!\, \mathrm{f}^{\mathrm{n-k}}(\mathrm{u})) = \mathrm{Vect}(\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}); \mathrm{f}^{\mathrm{n}-2}(\mathrm{u}); \dots \dots ; \mathrm{f}^{\mathrm{n-k}}(\mathrm{u}))$.
Ces s-e-v sont évidemment deux à deux distincts ; leur nombre est donc $n + 1$.
■D'autre part ; on a :
$\mathrm{F}_0 = \{0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{f}^0)$ et $\mathrm{F}_{\mathrm{n}} = \mathrm{Vect}(\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{u}); \mathrm{f}^{\mathrm{n}-2}(\mathrm{u}); \dots \dots ; \mathrm{u}) = \mathrm{E} = \mathrm{Ker}(\mathrm{f}^{\mathrm{n}})$; (car $\mathrm{f}^{\mathrm{n}} = 0$)
Si $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$; on a :
$\mathrm{x} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \alpha_{\mathrm{i}}\, \mathrm{f}^{\mathrm{n-i}}(\mathrm{u}) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{f}^{\mathrm{k}}) \Leftrightarrow \mathrm{f}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \alpha_{\mathrm{i}}\, \mathrm{f}^{\mathrm{n+k-i}}(\mathrm{u}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{\mathrm{i}=\mathrm{k}+1}^{\mathrm{n}} \alpha_{\mathrm{i}}\, \mathrm{f}^{\mathrm{n+k-i}}(\mathrm{u}) = 0.$

Pour $k+1 \leq i \leq n$; on a $k \leq n+k-i \leq n-1$ et comme la famille $(f^j(u))_{0 \leq j \leq n-1}$ est libre ; la dernière relation équivaut à $\alpha_i = 0$; $\forall i \in \{k+1; \dots; n\}$; ainsi :
$Ker(f^k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f^{n-i}(u) \;;\; \alpha_i \in \mathbb{K} \right\} = \mathrm{Vect}\left(f^{n-1}(u); f^{n-2}(u); \dots\dots; f^{n-k}(u)\right) = F_k$

IV-Quatrième partie

IV.A) f représente l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé canoniquement à M et $\mathcal{B}_n$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_n}(f) = M$.

IV.B) Puisque M est à coefficients réels alors le polynôme caractéristique χ_f de f est à coefficients réels donc la fonction polynomiale $\chi_f : x \longrightarrow \chi_f(x) = x^n + \cdots . + a_0$ de la variable réelle est une application continue de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et comme n est impair ; on a $\lim_{-\infty} \chi_f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \chi_f = +\infty$; donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire ; χ_f admet une racine réel λ_0 qui est donc une valeur propre (réelle) de f.

IV.C.1) On a $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$; $Y = \frac{1}{2i}(Z - Z)$ avec $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$: alors :

$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z_1 + \overline{z_1} \\ z_2 + \overline{z_2} \\ \vdots \\ z_n + \overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z_1) \\ \mathrm{Re}(z_2) \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(z_n) \end{pmatrix}$; De même $Y = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(z_1) \\ \mathrm{Im}(z_2) \\ \vdots \\ \mathrm{Im}(z_n) \end{pmatrix}$.

Ainsi : $X; Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E$
Soit $a; b \in \mathbb{R}$ tels que $aX + bY = 0$; on a donc $\frac{a}{2}(Z + \overline{Z}) + \frac{b}{2i}(Z - \overline{Z}) = 0$ ou encore
$a'Z + b'\overline{Z} = 0$ $(*)$ avec $a' = \frac{a}{2} + \frac{b}{2i}$ et $b' = \frac{a}{2} - \frac{b}{2i}$ (**)
En multipliant (*) par M ; on aura $a'MZ + b'M\overline{Z} = 0$ et puisque M est à coefficients réels ; cela équivaut à : $a'MZ + b'\overline{MZ} = 0$ ou encore à : $a'\lambda Z + b'\overline{\lambda Z} = 0$ (***). En multipliant (*) par $\overline{\lambda}$ et en combinant avec (***) ; on aura : $a'(\lambda - \overline{\lambda})Z = 0$ et puisque $\lambda - \overline{\lambda} \neq 0$ (car λ comlexe non réel) et $Z \neq 0$; alors $a' = 0$ et par (*) ; on aura $b' = 0$ et en tenant compte de (**) ; on aura $a = b = 0$.
Ainsi la famille $(X; Y)$ est libre.

IV.C.2) On a $MZ = \lambda Z$; donc $M(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY)$ ou encore $MX + iMy = (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y)$ comme les matrices MX ; MY ; $\alpha X - \beta Y$ et $\beta X + \alpha Y$ sont des matrices à coefficients réels ; alors : $\begin{cases} MX = \alpha X - \beta Y = f(X) \\ MY = \beta X + \alpha Y = f(Y) \end{cases}$
Ainsi $f(X)$; $f(Y)$ $\in Vect(X; Y)$; comme $(X; Y)$ est libre ; on conclut que $F = Vect(X; Y)$ est un plan stable par f . De plus, on a : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_F = (X;Y)}(f_F) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

IV.D) l'affirmation :« tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-e-v E de dimension finie non nul admet au moins une droite ou un plan stable» est vraie. En effet :
Si f admet une valeur propre λ ; alors $F = Vect(e)$ où e est un vecteur propre de f associé à λ est une droite stable de E. Sinon ; Soit M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.On a $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M n'admet pas de valeur propre réelle. M admet (au moins) une valeur propre complexe non réelle ; il existe donc, (d'après **IV.C.2)**) ; $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que le s-e-v $Vect(X; Y)$ soit un plan stable par l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée canoniquement à M. Soit alors $x; y \in E$ tels que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = X$ et $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(y) = Y$; Alors $F = Vect(x; y)$ est un plan stable par f.

IV.E) Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que $f(X) = XP$

On vérifie facilement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.Supposons qu'il existe une droite ou un plan F stable par f.Alors, Il existe $P_0 \in F - \{0\}$. Puisque F est stable par f ; alors la famille $(P_0;\ \underbrace{XP_0}_{f(P_0)}\ ;\ \underbrace{X^2P_0}_{f^2(P_0)})$ est une famille de polynômes non nuls d'éléments de F de degré deux à deux distincts, donc elle est libre et par suite $\dim(F) \geq 3$; ce qui est faux, puisque $\dim(F) \leq 2$. Ainsi, On a un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel il n'existe ni droite ni plan stable par f.

IV.F) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

IV.F.1) On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 4 & 0 \\ -1 & X+2 & 1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2+2X+5)$

Le discriminant du trinôme X^2+2X+5 est $\Delta = -16 < 0$. Ainsi A admet une seule valeur réelle $\lambda_0 = 1$ et deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées $\lambda_1 = -1+2i = \overline{\lambda_2}$.

■ Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; On a $U \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4y = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$

Ainsi $E_1(A) = \mathrm{Vect}(U) \overset{\text{notation}}{=} G$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. G est une droite stable par f.

■ Pour $\lambda_1 = -1+2i$. Déterminons un vecteur $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) - \{0\}$ tel que $AZ = \lambda_1 Z$; on a :

$$AZ = \lambda_1 Z \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2i)x - 4y = 0 \\ x - (1+2i)y - z = 0 \\ x + y + (1-2i)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1+i)y \\ z = -iy \end{cases} ;\ (y \in \mathbb{C})$$

On choisit $Z = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ obtenu pour $y = 1$. Ainsi $Z = X + iY$; avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après **IV.C.2) ;** $F = Vect(X;Y)$ est un plan stable par f.

On a : $\det_{\mathcal{B}_c}(X;Y;U) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; donc (X; Y; U) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. De plus ; en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et en tenant compte $(cf\ IV.C.2)$ de ce que $\begin{cases} f(X) = \alpha X - \beta Y \\ f(Y) = \beta X + \alpha Y \end{cases}$ avec ici $\alpha = -1$ et $\beta = 2$; car $\lambda_1 = -1+2i$; on a : $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV.F.2) Soit : $(\mathcal{P}_U)$ $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = U \end{cases}$; $(U \in G)$

Posons, pour $t \in \mathbb{R}$; $X(t) = e^t U$. On a X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$X'(t) = e^t U \underbrace{=}_{car\ U \in E_1(A)} e^t AU = A(e^t U) = AX(t)$; de plus $X(0) = e^0 U = U$. Ainsi ; X est une solution et c'est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_U)$, d'après le théorème de Cauchy-Lipchitz.

IV.F.3) On se donne $\sigma = (a;b) \in \mathbb{R}^2$ et on considère le problème de Cauchy :

$$\mathcal{C}_\sigma \begin{cases} x' = -x + 2y & (1) \\ y' = -2x - y & (2) \\ x(0) = a\ ;\ \ y(0) = b & (3) \end{cases}$$

■ On a $x'(0) = -x(0) + 2y(0) = -a + 2b$; $y'(0) = -2x(0) - y(0) = -2a - b$

■ D'après (1) et (2), toute solution $\phi = (x; y)$ est de classe C^2(en fait de classe C^∞) et on a :

$$\begin{cases} x'' = -x' + 2y' \underbrace{=}_{(1)\text{ et }(2)} -(-x+2y) + 2(-2x-y) = -3x - 4y \underbrace{=}_{(1)} -3x - 4\left(\frac{x'+x}{2}\right) = -2x' - 5x \\ y'' = -2x' - y' = -2(-x+2y) - (-2x-y) = 4x - 3y = 4\left(\frac{-y'-y}{2}\right) - 3y = -2y' - 5y \end{cases}$$

Ainsi ; on a : $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0 \\ y'' + 2y' + 5y = 0 \end{cases}$; Donc x et y sont solutions d'une même équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) : $f'' + 2f' + 5f = 0$

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 2r + 5 = 0$.

$\Delta' = 1 - 5 = -4$; Ainsi : $r_1 = -1 + 2i = \overline{r_2}$ et alors : $\begin{cases} x(t) = e^{-t}(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)) \\ y(t) = e^{-t}(k_1\cos(2t) + k_2\sin(2t)) \end{cases}$

où $c_1; c_2; k_1$ et k_2 sont des constantes réels que l'on déterminera en calculant $x'(t)$ *et* $y'(t)$ et en tenant compte du fait que $x(0) = a$; $y(0) = b$; $x'(0) = -a + 2b$ *et* $y'(0) = -2a - b$; on trouve $\begin{cases} x(t) = e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t)) \\ y(t) = e^{-t}(b\cos(2t) - a\sin(2t)) \end{cases}$; C'est l'unique solution du problème $\mathcal{C}_\sigma$.

IV.F.4) Conservons les notations de la question IV.F.1) ; on a $A = PTP^{-1}$.Pour $X: \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; posons $Y = P^{-1}X$. P étant constant ; Donc : $X' = AX \Leftrightarrow PY' = (PTP^{-1})PY \Leftrightarrow Y' = TY$ (*)

Notons : $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. On a : (*) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \\ z' = z \end{cases}$ (**)

D'après IV.F.3) ; cela équivaut à ; $\exists\, a; b, c \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x(t) = e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t)) \\ y(t) = e^{-t}(b\cos(2t) - a\sin(2t)) \\ z(t) = c\,e^t \end{cases}$ (***)

et donc : $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1} + y(t)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_2} + z(t)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_3}$ (****)

P étant inversible, donc la famille $\mathcal{B} = (V_1; V_2; V_3)$ de ses vecteurs colonnes forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et (****) montre que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(X(t)) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.D'autre part ;$x, y, z$ sont de classe C^∞

■Soit X une solution du système différentiel $X' = AX$ telle que sa trajectoire est rectiligne ou plane ; alors $(X'(0); X''(0); X'''(0))$ est liée, donc $\det_{\mathcal{B}}(X'(0); X''(0); X'''(0)) = 0$

Or, par (***) ; on a : $x(0) = a$; $y(0) = b$; $z(0) = c$ et par (**), on a : $x'(0) = -a + 2b$; $y'(0) = -2a - b$; $z'(0) = c$. En dérivant deux fois le système (**) et en faisant t=0 ; on obtient :

$$\begin{cases} x''(0) = -x'(0) + 2y'(0) = -(-a+2b) + 2(-2a-b) = -3a - 4b \\ y''(0) = -2x'(0) - y'(0) = -2(-a+2b) - (-2a-b) = 4a - 3b \\ z''(0) = c \end{cases}$$

De même ; on trouve : $x'''(0) = 11a - 2b$; $y'''(0) = 2a + 11b$; $z'''(0) = c$.

on a : $\det_{\mathcal{B}}(X'(0); X''(0); X'''(0)) = \begin{vmatrix} -a+2b & -3a-4b & 11a-2b \\ -2a-b & 4a-3b & 2a+11b \\ c & c & c \end{vmatrix}$

$$\underbrace{=}_{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \text{ puis } C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \begin{vmatrix} -a+2b & -2a-6b & 14a+2b \\ -2a-b & 6a-2b & -2a+14b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -80c(a^2 + b^2)$$

Alors : $\det_{\mathcal{B}}(X'(0); X''(0); X'''(0)) = 0 \Leftrightarrow (c = 0)$ *ou* $(a = b = 0)$

■Si $c = 0$; (****) s'écrit : $X(t) = x(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}(b\cos(2t) - a\sin(2t))\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour $a; b \in \mathbb{R}; X$ est une solution et on voit bien que sa trajectoire est contenue dans un plan dirigé par $u = (1;1;0)$ et $v = (1;0;-1)$: Si $a = b = 0$; cette trajectoire est réduite au point $O = (0;0;0)$ et si $(a;b) \neq (0;0)$; on vérifie que la famille $(X'(0); X'\left(\frac{\pi}{4}\right))$ est libre et donc cette trajectoire est plane.

■Si $a = b = 0$; (****) s'écrit : $X(t) = c\,e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $c \in \mathbb{R}; X$ est une solution et on voit bien que sa trajectoire est contenue dans une droite dirigé par $w = (1;0;1)$: Si $c = 0$; cette trajectoire est réduite au point $O = (0;0;0)$ et si $c \neq 0$; cette trajectoire est rectiligne.

V-Cinquième partie

V.A.1) Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\varepsilon_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\varepsilon_i$; $(\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ base de $E)$

Analyse : Supposons qu'il existe un produit scalaire $\langle\,;\rangle$ pour lequel $\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \dots; \varepsilon_n)$ est une base orthonormé ; alors :

$$\langle x\,;y\rangle = \langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\,\varepsilon_i\,; \sum_{j=1}^{n} y_j\,\varepsilon_j\rangle \underbrace{=}_{\text{bilinéarité}} \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \varepsilon_i\,;\varepsilon_j\rangle) \underbrace{=}_{\mathcal{B}\text{ base orthonormée}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Synthèse : posons ; $\langle x\,;y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ .On vérifie alors qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sue E et que $\mathcal{B}$ en est une base orthonormée. L'unicité de ce produit scalaire découle de l'analyse.

V.A.2) Si $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$; on a : $\langle x\,;y\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^{t}U\,V$

V.B) On a $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(u)$; posons pour $x \in E$; $X = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x)$

On a H est stable par $f \Leftrightarrow \forall x \in H$; $f(x) \in H \Leftrightarrow \forall x \in H$; $\langle f(x)\,;u\rangle = 0$. Or $\langle f(x)\,;u\rangle = {}^{t}(AX)\,U = {}^{t}X\,{}^{t}A\,U = \langle x\,;v\rangle$ où v est le vecteur de E tel que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{v}) = {}^{t}A\,U$. Donc : H est stable par $f \Leftrightarrow \forall x \in H$; $\langle x\,;v\rangle = 0 \Leftrightarrow v \in H^{\perp} = \mathrm{Vect}(u) \Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $v = \lambda u$ ou encore tel que ${}^{t}A\,U = \lambda U \underset{(U\neq 0 \text{ car } u\neq 0)}{\Leftrightarrow} U$ est un vecteur propre de ${}^{t}A$.

V.C) On a $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(\mathrm{f})$ où $\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$. On considère alors le produit scalaire canonique pour lequel $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

D'après la question précédente ; pour déterminer les plans stables par f ; on détermine les vecteurs propres de ${}^{t}A$. On a : $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}({}^{t}A) = \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$.

Après calcul ; on trouve $E_1({}^{t}A)$ =Vect (U) avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On conclut que $H = (Vect(U))^{\perp}$ est l'unique plan stable par f . Une équation cartésienne de H dans $\mathcal{B}$ est : $x - y + z = 0$; par suite $H = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On voit que l'on retrouve le plan stable obtenu à la question IV.F.1).

.

V.D.1) On a f est diagonalisable ; donc E admet une base $\mathcal{B}' = (e_1; \dots; e_n)$ formée de vecteurs propres de f.

Si n=1 ; on a $H_1 = \{0\}$ qui est un hyperplan stable par f.

Si n≥2. Posons pour $j \in \{1; \dots; n\}$; $H_j = \mathrm{Vect}(e_1; \dots; e_{j-1}; e_{j+1} \dots; e_n)$

Il est clair que tous les H_j sont des hyperplans de E et sont deux à deux distincts donc leur nombre est n. De plus, ils sont stables par f car ils sont engendrés par des vecteurs propres de f.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,e_i$; on a :

$x \in H_1 \cap \dots \cap H_n \Leftrightarrow \forall j \in \{1; \dots; n\}$; $x \in H_j \Leftrightarrow \forall j \in \{1; \dots; n\}$; $\alpha_j = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ainsi : $H_1 \cap \ldots . \cap H_n = \{0\}$.

V.D.2) La réponse est oui ; en effet :
Supposons qu'il existe n-hyperplans $H_1; \ldots .; H_n$ de E, stables par f et tels que $H_1 \cap \ldots . \cap H_n = \{0\}$.
Notons par $\langle\ ;\ \rangle$ l'unique produit scalaire qui fait de $\mathcal{B} = (\varepsilon_1; \ldots ; \varepsilon_n)$ une base orthonormée. On a:
$E = \{0\}^{L} = (H_1 \cap \ldots . \cap H_n)^{L} = \sum_{i=1}^{n} H_i^{L}$. Pour tout $i \in \{1; \ldots ; \mathrm{n}\}$; H_i est un hyperplan de E. Il existe donc $u_i \in E - \{0\}$ tel que $H_i^{L} = vect(u_i)$; ainsi ; la relation précédente s'écrit
$E = \sum_{i=1}^{n} vect(u_i)$ et en notant $U_i = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u_i)$; on déduit que $\mathcal{M}_{\mathrm{n},1}(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{n} vect(U_i)$. Ainsi
$\mathcal{C} = (U_1; \ldots ; U_n)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{\mathrm{n},1}(\mathbb{R})$ dont le nombre d'éléments est
$n = dim\mathcal{M}_{\mathrm{n},1}(\mathbb{R})$; alors c'est une base de $\mathcal{M}_{\mathrm{n},1}(\mathbb{R})$. Chaque H_{ii} étant stable par f ; donc, d'après la question **V.B)** ; chaque U_i est un vecteur propre de ${}^{t}A$; donc la base $\mathcal{C}$ est formée de vecteurs propres de ${}^{t}A$: ainsi ${}^{t}A$ est diagonalisable ; d'où A , et donc f est diagonalisable.