Sujet Hard

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée M^T.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_E appartienne à $\mathcal{A}$).

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $Mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I. Préliminaires. Polynôme minimal d'un endomorphisme

[Les résulats de cette partie ne sont nécessaires dans aucune de celles qui suivent (ils peuvent ponctuellement y être utilisés, mais on pourra toujours répondre sans eux)].

Dans cette partie, on considère un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie. On note A sa matrice dans une base quelconque de E.

1. On note $Z(u)$ l'ensemble des polynômes non nuls annulateurs de u, et l'on considère l'ensemble d'entiers I défini par $I = \{\deg(P), P \in Z(u)\}$.
   Montrer que I admet un minimum, que l'on notera d.
2. Montrer que u admet un unique polynôme annulateur unitaire et de degré d.

Dans toute la suite de ce problème, étant donné un endomorphisme u : u admet un unique polynôme annulateur non nul qui est unitaire et de degré minimal. Il est appelé polynôme minimal de u, et il est noté π_u. Si A est la matrice de u relativement à une base, on appelera également polynôme minimal de la matrice A le polynôme annulateur de u, et on le notera aussi π_A : ainsi $\pi_A = \pi_u$, et c'est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

3. Montrer que tout polynôme annulateur de u est divisible par π_u.
4. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si π_u est scindé à racines simples.

II. Exemples de sous-algèbres

II.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

5. Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
6. Les sous-ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
7. On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

II.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) | u(F) \subset F\}$.

8. Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
9. Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
   On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.
10. Déterminer $\max\limits_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

II.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

11. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
12. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
13. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

III. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice(i,j) de $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \ldots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

III.A - Calcul des puissances de J

14. Préciser les matrices J et J^2. (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geq 2$).
15. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leq k \leq n-1$.
16. Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leq k \leq n-1$?

III.B - Une base de $\mathcal{A}$

17. Montrer que $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.
18. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.
19. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.C - Diagonalisation de J

20. Déterminer le polynôme caractéristique de J.
21. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
22. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
23. Déterminer les valeurs propres complexes de J est les espaces propres associés.

III.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

24. Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
25. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

26. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$?

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

Théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

27. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leq n - 1$.

28. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

29. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(u)$.

30. Montrer que $\{A(u)|u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u)|u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.
31. Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.
32. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $T_n^+(\mathbb{C})$.

V. Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

V.A - Recherche d'un élément de rang 1

33. Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.
On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x)|u \in \mathcal{A}\}$.
34. Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v).$$

Considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}(v)$.

35. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

V.B - Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

36. Montrer qu'il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
37. Conclure