DS N°4

Version hard (d'après Centrale PC 2019), corrigé

I. Préliminaires

1. D'après le cours, u admet des polynômes annulateurs non nuls, l'ensemble $Z(u)$ est donc non vide. I est alors également non vide, et c'est une partie de $\mathbb{N}$. Ainsi I admet un minimum m.

2.
- Par définition, il existe un élément P de $Z(u)$ qui est de degré m ; notons λ son coefficient dominant ; alors $\frac{1}{\lambda} P$ est annulateur de u, et il est de degré m.
- Supposons que l'on ait deux polynômes Q_1, Q_2 annulateurs de u, unitaires et de degré m. Alors $Q_1 - Q_2$ est annulateur de u ; mais comme il est de degré strictement inférieur à m, il ne peut pas appartenir à $Z(u)$; c'est donc le polynôme nul, ainsi $Q_1 = Q_2$.

On a bien existence et unicité d'un polynôme annulateur unitaire et de degré m.

3. Soit P un polynôme annulateur de u, effectuons sa division euclidienne par π_u : P s'écrit sous la forme $P = Q\pi_u + R$, avec $\deg(R) < m$.

Alors $R(u) = P(u) - Q(u) \circ \pi_u(u)$. Comme P et π_u annulent u, c'est le cas de R également. Mais R étant de degré strictement inférieur à m, il n'appartient pas à $Z(u)$; c'est donc le polynôme nul, ainsi π_u divise P.

4.
- Si π_u est scindé à racines simples, c'est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u, donc u est diagonalisable.
- Si u est diagonalisable, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P. π_u divise P, il est donc lui aussi scindé à racines simples.

On a bien l'équivalence demandée.

II Exemples de sous-algèbres

II.A Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

5. En remarquant que $T_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(E_{ij})_{i\leqslant j}$ et $T_n^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(E_{ij})_{i<j}$ on montre immédiatement que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit de deux matrices triangulaires étant encore triangulaire, $T_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. De plus, si la diagonale de l'une des deux matrices triangulaires est nulle, la diagonale de la matrice produit le sera aussi. Donc $T_n^+(\mathbb{K})$ aussi est stable par produit.

$$\boxed{\text{Les ensembles } T_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

6. L'ensemble $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car il n'est pas stable par produit. En effet, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques, mais leur produit $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. L'ensemble $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre car $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } S_2(\mathbb{K}) \text{ et } A_2(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

7. Reprenons les contre-exemples de la question précédente. Les matrices $A' = \mathrm{Diag}(A, O_{k-2})$ et $B' = \mathrm{Diag}(B, O_{k-2})$ sont symétriques de taille k mais leur produit $A'B' = \mathrm{Diag}(AB, O_{k-2})$ ne l'est pas. La matrice $C' = \mathrm{Diag}(C, O_{k-2})$ est antisymétrique de taille k mais $C'^2 = \mathrm{Diag}(C^2, O_{n-2})$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } S_k(\mathbb{K}) \text{ et } A_k(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_k(\mathbb{K}).}$$

II.B Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

8. L'ensemble $\mathcal{A}_F$ n'est pas vide car l'endomorphisme nul 0_E stabilise F. Soit $u, v \in \mathcal{A}_F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in F$, $(u + \lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) \in F$. Donc $u + \lambda v$ stabilise F et $\mathcal{A}_F$ est stable par combinaison linéaire ce qui fait de $\mathcal{A}_F$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Soient $u, v \in \mathcal{A}_F$. Alors $(u \circ v)(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$ donc $u \circ v$ stabilise F et $\mathcal{A}_F$ est stable par composition.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$$

9. Soit G un supplémentaire de F dans E. Dans une base adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$ la matrice d'un endomorphisme stabilisant F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$. Réciproquement une telle matrice est la matrice d'un endomorphisme stabilisant F.
Donc $\mathcal{A}_F$ est isomorphe à $\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} : A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$ qui est de dimension $p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = (n-p+p)^2 - p(n-p)$.

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_F = n^2 - np + p^2.}$$

10. Pour tout $p \in \{1, \dots, p-1\}$, $n^2 - np + p^2 = (p - \frac{n}{2})^2 + \frac{3n^2}{4}$ donc la dimension de $\mathcal{A}_F$ est maximale quand $\left|p - \frac{n}{2}\right|$ est maximale *i.e* quand $p = 1$ ou $p = n-1$ auxquels cas elle vaut $n^2 - n + 1$.

$$\boxed{\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - np + p^2) = n^2 - n + 1.}$$

II.C exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

11. Posons $K := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\Gamma(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(I_2, K)$ ce qui montre que $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. De plus, $I_2^2 = I_2$, $I_2 K = K I_2 = K$ et $K^2 = -I_2$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit puisque qu'un produit de vecteurs d'une famille génératrice reste dans $\Gamma(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

12. Si $\Gamma(\mathbb{R})$ était diagonalisable tous ses éléments serait diagonalisable. En en particulier, $K \in \Gamma(\mathbb{R})$ serait diagonalisable. Son polynôme caractéristique $\chi_K = X^2 + 1$ serait alors scindé sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est manifestement pas le cas.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

13. Le polynôme $\chi_K = X^2+1 = (X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_K annule K. Donc K est annulé par un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ *i.e* est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

Soit $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $K = P\,\mathrm{Diag}(i,-i)P^{-1}$. Soit $M \in \Gamma(\mathbb{C})$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $M = aI_2 + bK$. Alors $M = P(aI_2 + b\,\mathrm{Diag}(i,-i))P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(a+ib, a-ib)P^{-1}$. Vrai pour tout $M \in \Gamma(\mathbb{C})$ donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

Remarque : On aurait aussi pu montrer que tous les éléments de $\Gamma(\mathbb{C})$ étaient diagonalisables -via leur polynôme caractéristique par exemple- puis que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une algèbre commutative ce qui prouverait que les éléments de $\Gamma(\mathbb{C})$ sont co-diagonalisables. L'esprit du sujet voulait cependant que nous passions par la diagonalisabilité de K.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A Calcul des puissances de J

14. Sans difficulté. La matrice J envoie e_i sur e_{i+1} et la matrice J^2 e_i sur e_{i+2} où les indices sont pris modulo n.

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

15. La matrice J^k est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme qui envoie e_i sur e_{i+k} toujours en prenant les indices modulo n. En particulier, J^n est la matrice identité.

$$\boxed{J^n = I_n.\ J^k \text{ n'a que des 0 sauf sur la } k\text{-ième sous-diagonale et la } n-k\text{-ième sur-diagonale où il y a des 1.}}$$

16. Sans difficulté.

$$\boxed{J(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \sum_0^{n-1} a_k J^k.}$$

III.B Une base de $\mathcal{A}$

17. D'après la question précédente, $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(J^0,\ldots,J^{n-1})$ donc la famille $(I_n,\ldots,J^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{A}$ (et $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel !). Montrons qu'elle est libre. Soient $a_0,\ldots,a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_0^{n-1} a_k J^k = 0$ *i.e* $J(a_0,\ldots,a_{n-1}) = 0$. Étant donné la définition de $J(a_0,\ldots,a_{n-1})$ on a $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Donc la famille $(J^0,\ldots,J^{n-1})$ est libre et c'est une base de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{(J^0,\ldots,J^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{A}.}$$

Remarque : En fait, $\mathcal{A} = \mathbb{R}[J]$ où $\mathbb{R}[J] = \{P(J) : P \in \mathbb{R}[X]\}$ est l'ensemble des polynômes en J. L'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(P) = P(J)$ est un morphisme d'algèbre. De plus $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[J]$ ce qui montre directement que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

18. Si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ alors en particulier M commute avec J. Réciproquement, si M commute avec J alors M commute avec $J^0, \ldots, J^{n-1}$. Définissons le centre de M comme l'ensemble $\mathcal{C}(M) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = MA\}$. En remarquant qu'il s'agit du noyau de l'application linéaire $A \mapsto AM - MA$ on prouve que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{C}(M)$ contient $\mathrm{Vect}(J^0, \ldots, J^{n-1}) = \mathcal{A}$ donc M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Une matrice } M \text{ commute avec } J \text{ si et seulement si elle commute avec tous les éléments de } \mathcal{A}.}$$

19. On sait déjà que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $M = J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et $N = J(b_0, \ldots, b_{n-1})$. Posons $P = \sum_0^{n-1} a_k X^k$ et $Q = \sum_0^{n-1} b_k X^k$ de sorte que $M = P(J)$ et $N = Q(J)$. Soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ le reste de la division euclidienne de PQ par $X^n - 1$. Il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $PQ = T(X^n - 1) + R$. Alors $PQ(J) = R(J)$ car $J^n - I_n = 0$. Alors $MN = PQ(J) = R(J) = J(c_0, \ldots, c_{n-1})$ où l'on a noté $R = \sum_0^{n-1} c_k X^k$. Donc $MN \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par produit et c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $MN = PQ(J) = QP(J) = NM$ donc les éléments de $\mathcal{A}$ commutent entre eux.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Remarque : Puisque φ est un morphisme d'algèbre et que $\mathbb{R}[X]$ est une algèbre commutative, l'algèbre $\mathbb{R}[J]$ est aussi commutative. En règle général deux polynômes en une même matrice/endomorphisme commutent toujours (pour peu que l'anneau de base soit commutatif).

III.C Diagonalisation de J

20. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_J annule J autrement dit π_J divise χ_J où π_J désigne le polynôme minimal de J. C'est le polynôme unitaire de plus petit degrès qui annule J. On a donc que $\deg \pi_J \leqslant n$. Si π_J est de degré n alors $\pi_J = \chi_J$. Le polynôme $X^n - 1$ annule J, est de degré n et est unitaire. Par ailleurs puisque la famille $(J^0, \ldots, J^{n-1})$ est libre, aucun polynôme de degré inférieur à $n-1$ ne peut annuler J. Donc $\deg \pi_J \geqslant n$ et $\deg \pi_J = n$. Donc $\pi_J = X^n - 1$. D'après ce qui vient d'être dit : $\chi_J = X^n - 1$.

Nous pouvons également traiter cette question sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ni la notion de polynôme minimal. Par définition, $\chi_J = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}$. Développons par rapport à la première colonne : $\chi_J = X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}_{n-1} = X^n + (-1)^n.(-1).(-1)^{n-2}$. La dernière égalité est obtenue en développant le deuxième déterminant par rapport à la première ligne.

$$\boxed{\chi_J = X^n - 1.}$$

21. Dans $\mathbb{C}$, $X^n - 1 = \prod_0^{n-1}(X - \omega^k)$ où $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Donc J est annulé par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C}).}$$

22. Pour $n=2$, le polynôme caractéristique de J est X^2-1 qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $n \geqslant 3$ le polynôme minimal de J est X^n-1 qui n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc aucun polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ n'annule J et J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{J \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sauf si } n=2.}$$

23. Le spectre de J est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$ où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Il y a n valeurs propres donc elles sont toutes de multiplicité (géométrique) 1 : $\dim E_{\omega^k}(J) = 1$ pour $k=0,\dots,n-1$. Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Posons $X_k := \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}$. Alors $JX_k = \begin{pmatrix} \omega^{-k(n-1)} \\ 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-2)} \end{pmatrix} = \omega^k X_k$. Donc X_k est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k et (X_k) est une base de $E_{\omega^k}(J)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\} \text{ et } E_{\omega^k}(J) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}.}$$

III.D Diagonalisation de $\mathcal{A}$

24. L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire **complexe**. Par exemple, $iJ \notin \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $iJ \notin \mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Non, } \mathcal{A} \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

25. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PJP^{-1} = \mathrm{Diag}(1,\dots,\omega^{n-1})$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A = Q(J)$. Alors $PAP^{-1} = PQ(J)P^{-1} = Q(PJP^{-1}) = Q(\mathrm{Diag}(1,\dots,\omega^{n-1})) = \mathrm{Diag}(Q(1),\dots,Q(\omega^{n-1}))$ et la matrice PAP^{-1} est diagonale.

$$\boxed{\text{Pour tout } A \in \mathcal{A},\ PAP^{-1} \text{ est diagonale.}}$$

L'égalité $PQ(J)P^{-1}$ vient du fait que $PJ^kP^{-1} = (PJP^{-1})^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

26. D'après la question précédente, la matrice $J(a_0,\dots,a_{n-1}) = Q(J)$ est semblable à la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(Q(1),\dots,Q(\omega^{n-1}))$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(Q(J)) = \{Q(1),\dots,Q(\omega^{n-1})\}.}$$

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente

27. Si $n=1$, les matrices nilpotentes sont les matrices nulles qui sont trigonalisables dans toute base.

$$\boxed{\text{Le résultat est vrai pour } n=1.}$$

28. S'il n'existe aucun tel sous-espace vectoriel alors $\mathcal{A}$ est irréductible. Or E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ d'après le théorème de Burnside. En particulier, $\mathrm{id}_E \in \mathcal{A}$ mais id_E n'est pas nilpotent ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{Il existe un sous-espace vectoriel } V \text{ de } E \text{ distinct de } E \text{ et } \{0\} \text{ stable par les éléments de } \mathcal{A}.}$$

28. S'il n'existe aucun tel sous-espace vectoriel alors $\mathcal{A}$ est irréductible. Or E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ d'après le théorème de Burnside. En particulier, $\mathrm{id}_E \in \mathcal{A}$ mais id_E n'est pas nilpotent ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{Il existe un sous-espace vectoriel } V \text{ de } E \text{ distinct de } E \text{ et } \{0\} \text{ stable par les éléments de } \mathcal{A}.}$$

29. Soit W un supplémentaire de V dans V et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $V \oplus W = E$. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où A est de taille $r \times r$, B de taille $r \times s$ et D de taille $s \times s$.

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ telle que } \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ où } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C}) \text{ et } D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C}).}$$

30. Un calcul matriciel par blocs montre que $\begin{pmatrix} A(u+\lambda v) & B(u+\lambda v) \\ 0 & D(u+\lambda v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ 0 & D(v) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A(uv) & B(uv) \\ 0 & D(uv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u)A(v) & * \\ 0 & D(u)D(v) \end{pmatrix}$. Ceci montre que $\{A(u) : u \in \mathcal{A}\}$ est une partie non vide (car $\mathcal{A}$ est non vide) stable par combinaison linéaire et stable par produit. C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. De même pour $\{D(u) : u \in \mathcal{A}\}$.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \{A(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{D(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \text{ et } \mathcal{M}_s(\mathbb{C}).}$$

Soit $u \in \mathcal{A}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u^N = 0_n$. Un calcul matriciel par blocs montre que $u^N = \begin{pmatrix} A(u)^N & * \\ 0 & D(u)^N \end{pmatrix}$. Donc $A(u)^N = 0_r$ et $D(u)^N = 0_s$.

$$\boxed{\text{Les éléments de } \{A(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{D(u) : u \in \mathcal{A}\} \text{ sont nilpotents.}}$$

31. Le sous-espace vectoriel V étant distinct de $\{0\}$ et de E, sa dimension r vérifie $1 \leqslant r \leqslant n-1$. De même pour s la dimension de W. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_r(\mathbb{C})$ et $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{A}$, les matrices $PA(u)P^{-1}$ et $QD(u)Q^{-1}$ sont triangulaires supérieures.

Posons $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Alors T est inversible d'inverse $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Alors $T\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)T^{-1} = \begin{pmatrix} PA(u)P^{-1} & * \\ 0 & QD(u)Q^{-1} \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbb{C})$. Donc $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

$$\boxed{\text{L'algèbre } \mathcal{A} \text{ est trigonalisable.}}$$

32. La matrice T est inversible. Elle envoie donc la base $\mathcal{B}$ sur une autre base $\mathcal{B}'$ de E. Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de u est $T\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,T^{-1} \in T_n^+(\mathbb{C})$.

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle les éléments de } \mathcal{A} \text{ sont triangulaires supérieures.}}$$

V.Le théorème de Burnside

V.A Recherche d'un élément de rang 1

33. Posons $F := \{u(x) : u \in \mathcal{A}\}$. Considérons le morphisme d'évaluation en x, $\mathrm{Eval}_x : \mathcal{A} \to E$ défini par $\mathrm{Eval}_x(u) := u(x)$. L'application Eval_x est linéaire et son image est exactement F ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E.

    Montrons F est stable par $\mathcal{A}$. Soit $z \in F$. Il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $z = u(x)$. Soit $v \in \mathcal{A}$. Alors $v(z) = (v \circ u)(x) \in \mathcal{A}$. Vrai pour tout $z \in F$ et $v \in \mathcal{A}$, donc F est stable par $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est irréductible, $F = \{0\}$ ou $F = E$.

    Si $F = \{0\}$ alors $u(x) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{A}$. Donc $x \in G := \cap_{u \in \mathcal{A}} \ker u$. Si $z \in G$ alors $v(z) = 0 \in G$ pour tout $v \in \mathcal{A}$ donc G est stable par $\mathcal{A}$. Donc $G = \{0\}$ ou $G = F$ par irréductibilité de $\mathcal{A}$. Or $x \in G$ est non nul donc $G \neq \{0\}$ et $G = E$. Donc $\ker(u) = E$ pour tout $u \in \mathcal{A}$ *i.e* $\mathcal{A} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Or $n \geqslant 2$, il existe donc H un sous-espace vectoriel de E strict non réduit à $\{0\}$. Alors H est stable par $\mathcal{A} = \{0\}$ ce qui contredit l'irréductibilité de $\mathcal{A}$.

    Donc $F = E$ et $y ßF$. Il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.

    $$\boxed{\text{Il existe } u \in \mathcal{A} \text{ tel que } u(x) = y.}$$

34. Notons r le rang de v. Puisque $r \geqslant 2$ il existe une famille libre à deux éléments de $\mathrm{Im}(v)$. Notons x et y leurs antécédents par v ; alors $v(x), v(y)$ est libre. Nécessairement, $v(x), v(y) \neq 0$. D'après la question précédente, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(v(x)) = y$.

    On a $(v \circ u)(\mathrm{Im}\, v) \subset \mathrm{Im}\, v$ donc on peut considérer $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}\, v$. Tout endomorphisme admet au moins une valeur propre complexe en dimension finie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{f} - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\, v}$ soit non inversible. En particulier, $\mathrm{rg}(\tilde{f} - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\, v}) < r$. Posons $f := \tilde{f} \circ v$ qui est bien défini si l'on voit v comme un élément de $\mathcal{L}(E, \mathrm{Im}\, v)$. Alors $f = v \circ u \circ v - \lambda v$ et $\mathrm{rg}\, f \leqslant \mathrm{rg}\, \tilde{f} < \mathrm{rg}\, v$ d'après ce qui vient d'être dit. De plus, $f(x) = v(u \circ v(x)) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x)$ est non nul par liberté de $(v(x), v(y))$ donc $\mathrm{rg}\, \tilde{f} > 0$. D'où le résultat.

    $$\boxed{\text{Il existe } u \in \mathcal{A} \text{ et } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } 0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v < \mathrm{rg}\, v.}$$

35. Rappelons que $\mathcal{A} \neq \{0\}$ car l'algèbre $\{0\}$ n'est pas irréductible dès que $n \geqslant 2$. Soit donc $v_0 \in \mathcal{A}$ non nul. Si $\mathrm{rg}\, v_0 = 1$ c'est terminé. Si $\mathrm{rg}\, v_0 \geqslant 2$ on construit alors $v_1 = v_0 \circ u \circ v_0 - \lambda v_0$ comme dans la question précédente. Alors v_1 est encore un élément de l'algèbre $\mathcal{A}$ et de plus, $1 \leqslant \mathrm{rg}\, v_1 \leqslant \mathrm{rg}\, v_0$. En itérant, on construit ainsi une suite d'éléments $v_0, v_1, v_2, \ldots$ de $\mathcal{A}$ de rangs strictement décroissants. Comme il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels, ce processus s'arrête à v_k de rang 1.

    $$\boxed{\text{Il existe } v \in \mathcal{A} \text{ de rang } 1.}$$

V.B Conclusion

36. Posons $x = u_(\varepsilon_0)$. Puisque u_0 n'est pas l'endomorphisme nul, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(x) = \varepsilon_i$ d'après la question 36. On pose alors $u_i := v_i \circ u_0$. D'une part, $u_i \in \mathcal{A}$. D'autre part, le noyau de u_i contient $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ donc u_i est de rang 0 ou 1. De plus, $u_i(\epsilon_1) = v_i(x) = \varepsilon_i$. Donc u_i est de rang 1 et vérifie bien $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$.

    $$\boxed{\text{Il existe } u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A} \text{ de rang 1 tels que } u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!].}$$

37. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. D'après la question 36, il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $w_j(\varepsilon_j) = \varepsilon_1$. Posons $f_{ij} = u_i \circ w_j$. Alors $f_{ij}(\varepsilon_j)\varepsilon_i$. De plus f_{ij} est de rang 1 donc $f_{ij}(\varepsilon_k) = 0$ si $k \neq j$. Donc la matrice de f_{ij} est la matrice élémentaire E_{ij}. Puisque $(E_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la famille $(f_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Donc l'algèbre $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

$\boxed{\text{Si } E \text{ est un } \mathbb{C}\text{-ev alors la seule sous-algèbre irréductible de } \mathcal{L}(E) \text{ est } \mathcal{L}(E).}$

Remarque : Ce n'est plus vrai si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, l'existence du scalaire λ de la question 37 vient du fait que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel il n'existe pas forcément de valeur propre.

$* * *$ FIN $* * *$
