DS N°4

Version soft (d'après CCINP MP 2012), corrigé

Préliminaires

1. D'après le cours, u admet des polynômes annulateurs non nuls, l'ensemble $Z(u)$ est donc non vide. I est alors également non vide, et c'est une partie de $\mathbb{N}$. Ainsi I admet un minimum m.

2.
- Par définition, il existe un élément P de $Z(u)$ qui est de degré m ; notons λ son coefficient dominant ; alors $\frac{1}{\lambda}P$ est annulateur de u, et il est de degré m.
- Supposons que l'on ait deux polynômes Q_1, Q_2 annulateurs de u, unitaires et de degré m. Alors $Q_1 - Q_2$ est annulateur de u ; mais comme il est de degré strictement inférieur à m, il ne peut pas appartenir à $Z(u)$; c'est donc le polynôme nul, ainsi $Q_1 = Q_2$.

On a bien existence et unicité d'un polynôme annulateur unitaire et de degré m.

3. Soit P un polynôme annulateur de u, effectuons sa division euclidienne par π_u : P s'écrit sous la forme $P = Q\pi_u + R$, avec $\deg(R) < m$.

Alors $R(u) = P(u) - Q(u) \circ \pi_u(u)$. Comme P et π_u annulent u, c'est le cas de R également. Mais R étant de degré strictement inférieur à m, il n'appartient pas à $Z(u)$; c'est donc le polynôme nul, ainsi π_u divise P.

4.
- Si π_u est scindé à racines simples, c'est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u, donc u est diagonalisable.
- Si u est diagonalisable, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples P. π_u divise P, il est donc lui aussi scindé à racines simples.

On a bien l'équivalence demandée.

Partie I

5.

$\varphi_A(\lambda M + N) = \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N)$ clairement et non moins clairement I_2 et A appartiennent à $\operatorname{Ker}\varphi_A$. □

6.

Il vient $\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$ □

Remarque : Il en découle bien comme annoncé dans l'énoncé que φ_A est l'endomorphisme nul si et seulement si $b = c = 0$ et $a = d$ soit si et seulement si $A = \lambda I_2$.

7.

En remplaçant la première colonne C_1 de $\mathrm{Det}(XI_4 - U)$ par $C_1 + C_2$ on factorise X dans la première colonne. Puis en remplaçant la seconde ligne L_2 par $L_2 - L_1$ et en développant par rapport à la première colonne dont seul le premier terme est non nul il vient :
$\chi_{\varphi_A}(X) = X \begin{vmatrix} X & -2c & 2b \\ -b & X-(a-d) & 0 \\ c & 0 & X+(a-d) \end{vmatrix} = X\Delta(X)$. En développant par la règle de Sarrus il vient :

$\Delta(X) = X(X^2 - (a-d)^2) - 2bc(X - (a-d)) - 2bc(X + (a-d)) = X(X^2 - (a-d)^2) - 4bcX.$

Ainsi $\chi_{\varphi_A}(X) = X^2\left(X^2 - ((a-d)^2 + 4bc)\right)$ □

8.

Si $(a-d)^2 + 4bc < 0$ alors φ_A admet 2 valeurs propres non réelles donc n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.
Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ alors $\chi_{\varphi_A}(X) = X^4$ donc φ_A est diagonalisable si et seulement si $\varphi_A = 0$ ce qui n'est pas par hypothèse.
Si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ alors φ_A admet deux valeurs propres réelles non nulles de multiplicité 1 et 0 comme valeur propre double. Donc $\dim\ \mathrm{Ker}\,\varphi_A \leqslant 2$ et φ_A est diagonalisable si et seulement $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ est de dimension 2. Or I_2 et A appartiennent à $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ et sont linéairement indépendantes par hypothèse. Donc $\dim\ \mathrm{Ker}\,\varphi_A \geqslant 2$ et donc $\dim\ \mathrm{Ker}\,\varphi_A = 2$ et ainsi φ_A est bien diagonalisable.

En conclusion si $A \neq \lambda I_2$ alors φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$. □

9.

$\chi_A(X) = X - (a+d)X + ad - bc$ dont le discriminant a pour valeur $(d-a)^2 + 4bc$.
Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$ pas de valeurs propres réelles donc A n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.
Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$ alors A admet une seule valeur propre λ d'ordre 2 donc n'est pas diagonalisable. En effet si elle l'était elle serait semblable à λI_2 donc égale λI_2 ce qui n'est pas par hypothèse.
Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$ alors A admet deux valeurs propres réelles distinstes donc est diagonalisable.

Ainsi φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est. □

Partie II

10.

a) Si M est une matrice quelconque, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne j qui constitué de la colonne i de M de sorte que $DE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$.
De même $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ligne i qui constitué de la ligne j de M de sorte que $E_{i,j}D = \lambda_j E_{i,j}$.
Ainsi $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ □

b) Ce qui s'écrit encore $P^{-1}APE_{i,j} - E_{i,j}P^{-1}AP = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ et en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} il vient $AB_{i,j} - B_{i,j}A = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$ □

c) Comme l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les n^2 matrices $B_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi les matrices $B_{i,j}$ forment une base de vecteurs propres pour φ_A qui de ce fait est diagonalisable. □

11.

a)• Comme φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes ses valeurs propres sont réelles. □

- A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique. □

- $\varphi_A(X^tY) = AX^tY - X^tYA = AX^tY - X^t({}^tAY) = zX^tY - X\overline{z}\,{}^tY = (z - \overline{z})X^tY.$

Or si $M = X^tY$ il vient avec des notations claires $m_{i,j} = x_i y_j$ de sorte que, comme X et Y sont non nuls, l'un au moins des coefficients de X^tY est non nul donc $X^tY \neq 0$ et ainsi $z - \overline{z}$ est bien valeur propre de φ_A. □

b) Si A admet une valeur propre complexe non réelle z alors, comme A est réelle (donc son polynôme caractéristique à coefficients réels) $\overline{z}$ est également valeur propre de A. La question précédente peut donc s'appliquer et il en découle que φ_A admet une valeur propre imaginaire pure ce qui n'est pas puisque par hypothèse φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable.
Ainsi si φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable alors toutes les valeurs propres de A sont réelles. $\square$

c) De $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ et $AX = \lambda X$ on tire $AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$ $\square$

d) Comme $(P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que X est non nul, vect $(P_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ = vect $(MX)_{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^n$
En effet l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\phi(M) = MX$ est linéaire et surjective : si Y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ il existe un endomorphisme transformant X en Y (comme $X \neq 0$ on peut le compléter en une base $\mathcal{B}$ et il suffit de considérer l'endomorphisme défini par le fait qu'il s'annule sur tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf en X transformé en Y).
Donc il existe au moins n couples (i_k, j_k) tels que $(P_{i_k,j_k}X)_{1\leqslant k\leqslant n}$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
La question c) prouve alors que c'est une base de vecteurs propres de A. $\square$

Ainsi φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Partie III

12

La famille est libre car si $\sum_{k=0}^{m-1} a_k A^k = 0$ alors le polynôme $\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ annule A donc est nul car de degré strictement inférieur à m.
En outre si P est un polynôme quelconque et $P = \Pi Q + R$ la division euclidienne de P par le polynôme minimal Π, il vient d'après le classique morphisme d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $P(A) = \Pi(A)Q(A) + R(A) = R(A)$ donc $P(A) \in \mathbb{R}_{m-1}[A]$ et ainsi la famille est bien génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
Ainsi la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est bien une base de $\mathbb{R}[A]$. $\square$

13.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(A)$ qui commute avec A donc $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_{m-1}[A] \subset \operatorname{Ker}\varphi_A$ donc dim $\operatorname{Ker}\varphi_A \geqslant m$. $\square$

14 (en **c.** : lire : « questions **12 et 13** » au lieu de « questions **8 et 9** »

a)Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ c'est à dire $\lambda_1 u^{n-1}(y) + \lambda_2 u^{n-2}(y) + \ldots + \lambda_n y = 0$ il vient en composant par u^{n-1} que $\lambda_n = 0$ puis en composant par u^{n-2} que $\lambda_{n-1} = 0$. Itération claire.
Ainsi la famille est libre donc est bien une base de $\mathbb{R}^n$ car composée de n vecteurs. $\square$

b) Notons $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$. En vertu de la question précédente, pour prouver que $v = w$ il suffit d'établir que $v(e_i) = w(e_i)$ pour tout i de 1 à n c'est à dire encore $v(u^k(y)) = w(u^k(y))$ pour tout k de 0 à $n-1$.
Or par définition des α_i on a $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(y) = w(y)$ (1) donc c'est bien vérifié pour $k = 0$.
En outre comme $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ on a v qui commute avec u donc avec u^k et ainsi de (1) on tire pour k de 1 à $n-1$:
$v(u^k(y)) = u^k(v(y)) = u^k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(y)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n+k-i}(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(u^k(y)) = w(u^k(y))$
Ainsi on a bien $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$ $\square$

c) On a vu dans les questions 8 et 9 que $\mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$ est de dimension m et est toujours inclus dans $\operatorname{Ker}\varphi_A$.
La question précédente montre que lorsque A est nilpotente d'indice n alors $\operatorname{Ker}\varphi_A \subset \mathbb{R}_{m-1}(A)$.

Ainsi dans ce cas a-t-on $\operatorname{Ker}\varphi_A = \mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$ et est donc de dimension m. $\square$

15

a) $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ si et seulement si v commute avec u donc si et seulement si $v(u(x)) = u(v(x))$ pour tout $x \in E_u(\lambda_k)$ et pour tout k de 1 à p puisque $\mathbb{R}^n = E_u(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E_u(\lambda_p)$
Or pour $x \in E_u(\lambda_k)$ il vient $v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$ donc $v(u(x)) = u(v(x))$ si et seulement si $v(x) \in E_u(\lambda_k)$.
Ainsi $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ si et seulement si tout sous-espace propre de A est stable par B. $\square$

b) Donc $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$ si et seulement si, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, la matrice de v est une matrice triangulaire par blocs $\operatorname{diag}(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ où C_k est une matrice carrée d'ordre m_k. $\square$

c) Il en découle que $d \underset{\text{DEF}}{=} \dim \operatorname{Ker} \varphi_A = \sum_{k=1}^{n} m_k^2$. $\square$

d)
- Si $p = 7$ alors $m_k = 1$ pour tout k et $d = 7$.
- Si $p = 6$ alors quitte à changer la numérotation on a $m_1 = 2$ et $m_k = 1$ pour $k \geqslant 2$ donc $d = 9$
- Si $p = 5$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 1, 1, 1, 1)$ ou $(2, 2, 1, 1, 1)$ donc $d = 13$ ou $d = 11$
- Si $p = 4$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (4, 1, 1, 1)$ ou $(3, 2, 1, 1)$ donc $d = 19$ ou $d = 15$.
- Si $p = 3$ alors $(m_1, m_2, m_3) = (5, 1, 1)$ ou $(4, 2, 1)$ ou $(3, 3, 1)$ ou $(3, 2, 2)$ donc $d = 27$ ou $d = 21$ ou $d = 19$ ou $d = 17$.
- Si $p = 2$ alors $(m_1, m_2) = (6, 1)$ ou $(5, 2)$ ou $(4, 3)$ donc $d = 37$ ou $d = 29$ ou $d = 25$
- Si $p = 1$ alors $m_1 = 7$ et $d = 49$. $\square$

Partie IV

16.

.La relation proposée est vraie pour $k = 0$ et pour $k = 1$. En outre en supposant qu'elle soit vraie au rang $k \geqslant 1$, en remarquant que $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA)$, on obtient qu'elle est vraie au rang $k + 1$.
Ainsi $\varphi_A(B^k) = k\alpha B^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ $\square$

17.

Par linéarité de φ_A on en déduit de suite que $\varphi_A(P(B)) = \alpha BP'(B) \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$ $\square$

18.

En particulier avec $P = \Pi_B$ le polynôme minimal de B, il vient $\alpha B\Pi'_B(B) = 0$ donc $X\Pi'_B$ annule B puisque $\alpha \neq 0$. Donc $X\Pi'_B$ est multiple de Π_B et comme il est de même degré que Π_B on a $X\Pi'_B = \lambda\Pi_B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La considération des termes de degré d fournit alors $\lambda = d$.
Ainsi $X\Pi'_B = d\,\Pi_B$ $\square$

19.

En écrivant que $\Pi_B(X) = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ la relation précédente fournit $(k - d)a_k = 0$ pour k de 0 à $d - 1$ donc $a_k = 0$. Ainsi $\Pi_B = X^d$ et donc $B^d = 0$.

Si B est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de φ_A alors B est nilpotente. $\square$