Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

Feuille d'exercices

Espaces probabilisés

I – Probas, dénombrement : exercices (en général) primaires

1. **1.** Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire au hasard et simultanément 5 boules de l'urne.
Déterminer la probabilité que l'échantillon soit représentatif de l'urne, c'est – à – dire qu'il soit composé de 3 boules blanches et 2 boules noires.

2. Même question si les boules sont tirées une à une et sans remise.

3. Même question si les boules sont tirées une à une et avec remise.

2. **1.** Un sac contient 5 jetons blancs et 4 jetons noirs. On tire un à un et sans remise 3 jetons du sac. Probabilité d'obtenir BNB *dans cet ordre ?* (deux méthodes)

2. Même question si les tirages ont lieu avec remise.

3. Statistiquement, on sait que 5 hommes sur 100 et 25 femmes sur $10\,000$ sont daltoniens.

1. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité que cette personne soit daltonienne ?

2. La personne choisie est daltonienne. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme ?

4. Un test T d'une maladie M a été testé en laboratoire et a constaté que : $\mathbb{P}\left(T \,/\, M\right) = 0{,}95$; $\mathbb{P}\left(\overline{T} \,/\, \overline{M}\right) = 0{,}95$.

La fréquence d'apparition de M est $0{,}005$. Calculer $\mathbb{P}\left(M \,/\, T\right)$. Qu'en pensez-vous ?

5. Un détecteur de mensonges est fiable dans 90% des cas, tant pour détecter les menteurs que ceux qui disent la vérité. Pour réduire les vols, une entreprise licencie tous les employés détectés par l'appareil comme étant des voleurs.
Cet exercice est tiré d'annales esc – eco, ça se voit, non ?
V est l'ensemble des voleurs, L est l'ensemble des licenciés. La proportion des voleurs dans l'entreprise est de 1% (avant la campagne de détection des voleurs).
Quelle est la proportion des licenciés ? Quelle est la proportion des voleurs parmi les non – licenciés ?
Quelle est la proportion des non voleurs parmi les licenciés ? Moralité (*sic*) ?

6. Trois machines fabriquent des boulons : la machine A assure 20% de la production et un boulon sur 100 est défectueux. La machine B assure 30% de la production et 2 boulons sur 100 sont défectueux. La machine C assure 50% de la production et 5 boulons sur 100 sont défectueux.
Quelle est la production de boulons défectueux dans la production totale ? Quelle est la production de boulons venant de C parmi les boulons défectueux ?

7. Deux candidats A et B se présentent à une élection. Des sondages ont révélé que l'électorat attendu de A se compose de 60% de femmes, celui de B de 45%. A est élu avec 55% des suffrages. On interroge au hasard un électeur au sortir de l'isoloir, c'est une femme. Quelle est la probabilité qu'elle ait voté pour A ?

8. Un distributeur de cafés A fonctionne correctement un jour sur deux (en moyenne.) Un autre distributeur de cafés B fonctionne deux jours sur trois.

Le jour n°1, une personne choisit au hasard un des distributeurs A, B. Il décide d'utiliser le même distributeur le lendemain si celui – ci lui a donné un café correct, et de changer de distributeur sinon. Il procède de même les jours suivants.

On considère les événements suivants : (n appartenant à $\mathbb{N}^*$)

A_n : Le jour n° n, la personne utilise le distributeur A.

B_n : Le jour n° n, la personne utilise le distributeur B.

C_n : Le jour n° n, la personne boit un café correct.

Soient $p_n = \mathbb{P}\left(A_n\right)$, $q_n = \mathbb{P}\left(C_n\right)$. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n. Quelle est la nature de la suite $\left(p_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

En déduire p_n en fonction de n. Exprimer q_n en fonction de p_n. En déduire la probabilité de boire un café correct le jour n° n.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la probabilité de tirer l'entier n comme étant égale à $\dfrac{1}{2^n}$.

1. Montrer que l'on a bien ainsi défini une probabilité.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'évènement : " l'entier n tiré est un multiple de k ".

Exprimer $P\left(A_k\right)$ en fonction de k.

3. Calculer $P\left(A_2 \cup A_3\right)$.

4. On note B l'événement : " l'entier tiré est un nombre premier ". Montrer que $\dfrac{13}{32} \leq P\left(B\right) \leq \dfrac{209}{504}$.

10. Un jeu idiot consiste en une succession de lancers d'un dé normal. A l'issue de chaque lancer :

-- si le joueur obtient 1, il a gagné et le jeu s'arrête ;

-- si le joueur obtient 5 ou 6, il a perdu et le jeu s'arrête.

-- sinon, le jeu continue.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que le jeu continue au moins jusqu'au $n^{\text{ième}}$ lancer ;

déterminer la probabilité v_n de l'événement : V_n : « le jeu s'arrête par victoire à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer ».

2. Exprimer l'événement V : « le joueur gagne » à l'aide des V_n, puis calculer sa probabilité.

11. On classe 30 individus, et on retient la liste ordonnée des 5 premiers.

Combien y a-t-il de listes possibles?

Combien y a-t-il de façons de classer 5 individus en supposant qu'il puisse y avoir des ex aequo ?

12. Soit E un ensemble de cardinal n.

Calculer le nombre de partages de E en p ensembles deux à deux disjoints.

13. Soit $E = \left\{100000, ..., 999999\right\}$.

Soit F l'ensemble des éléments n de E dont les chiffres sont deux à deux distincts.

a. Donner les cardinaux de E et de F.

b. Quel est le nombre d'éléments de F dont un des chiffres est égal à 0 ?

14. On dispose de 200 boules que l'on doit répartir dans 10 urnes, chaque urne contenant exactement 20 boules.

Combien y a – t – il de répartitions possibles ?

15. Avec les neuf chiffres : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$:

a. Combien peut – on former de nombres de cinq chiffres ?

b. Combien peut – on former de nombres de cinq chiffres tous distincts ?

c. Combien peut – on former de nombres de cinq chiffres rangés en ordre strictement croissant ?

d. Combien peut – on former de nombres de cinq chiffres comportant exactement deux fois le chiffre 1 ?

16. On dispose de n boules blanches indiscernables les unes des autres, et de m boules noires indiscernables les unes des autres. De combien de manières peut – on ranger toutes ces boules dans p boîtes discernables ?

17. On dispose de 49 numéros (1 à 49). On tire simultanément 6 de ces numéros.

Quel est le nombre de tirages possibles ?

Combien de ces tirages comportent 6 numéros consécutifs ?

Combien comportent 6 nombres en progression arithmétique ?

18. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules deux par deux et sans remise jusqu'à vider l'urne.

Quelle est la probabilité d'avoir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire ?

19. De combien de manières peut – on disposer en ligne un jeu de 32 cartes comportant 4 cartes indiscernables portant le numéro 1, 4 cartes indiscernables portant le numéro 2, ….., 4 cartes indiscernables portant le numéro 8 ?

20. Quatre joueurs reçoivent chacun 13 cartes d'un jeu constitué des 52 cartes habituelles.

Soient X, Y, Z et T ces quatre joueurs.

1. Quel est le nombre de répartitions dans lesquelles X reçoit exactement 6 piques ? Exactement 2 as ?

2. Soient a, b, c, d tels que $a + b + c + d = 13$.

Quel est le nombre de répartitions dans lesquelles les joueurs X, Y, Z, T reçoivent respectivement a, b, c et d piques ?

21. On considère un jeu de hasard dans lequel la probabilité de gagner est égale à p, et celle de perdre à $q = 1 - p$.

Soient m et n deux entiers strictement positifs.

Quelle est la probabilité de gagner n parties avant d'avoir perdu m fois ? On pourra remarquer qu'il suffit de prendre en compte les $m + n - 1$ premières parties.

22. On dispose de trois urnes indiscernables ; la première contient deux boules rouges, la deuxième deux boules bleues et la troisième une boule rouge et une boule bleue. On choisit une urne au hasard, puis une boule dans cette urne.

Comment parier sur la couleur de la boule restant dans l'urne ?

II Probas, quelques exercices plus ou moins théoriques

Exercice 23

Soient X et Y deux ensembles, $\mathcal{T}$ une tribu sur Y, et f une application de X vers Y.

Montrer que $\left\{ f^{-1}\left\langle B \right\rangle, B \in \mathcal{T} \right\}$ est une tribu sur X.

Exercice 24

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et B un évènement de cet espace.

1. Montrer que $\mathcal{A}_B = \{ A \cap B, A \in \mathcal{A} \}$ est une tribu sur A.

2. Donner une CNS pour que la restriction de $\mathbb{P}$ à l'espace probabilisable $(B, \mathcal{A}_B)$ soit une probabilité.

Exercice 25

Théorèmes de limite monotone pour les mesures de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$.

On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_{k-1} \right)$.

2. Montrer que les ensembles B_n sont deux à deux disjoints, et prouver que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$

•• $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n \right)$.

3. Prouver que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n \right)$.

Exercice 26

Lemme de Borel – Cantelli

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note $A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geq p} A_n \right)$.

1. Interpréter l'évènement A.

2. Montrer que si la série $\left(\sum P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $P(A) = 0$.

3. Montrer que si la série $\left(\sum P(A_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, alors $P(A) = 1$.

Exercice 27

On s'est confectionné un nombre infini de tartines à la confiture de poire. On s'aperçoit alors qu'il n'aiimme pas la pooire ; aussi jette – t – on par terre ses tartines, une à une ; la tartine N° i a une probabilité a_i de retomber sur le côté confituré.

1. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la tartine N° i soit celle qui, la première, tombe sur le côté confituré ?

2. Soit $(a_i)_{n \geq 1}$ une suite de réels appartenant à $[0, 1]$. Justifier l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - a_i) \right) = 1 - \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - a_i).$$

Exercice 28

On choisit de manière équiprobable l'un des nombres entiers du segment $\{1, ..., n\}$.

Soit $p \in \{1, ..., n - 1\}$. On note A_p l'événement : « le nombre choisi est divisible par p ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ lorsque p divise n.

2. Montrer que si p_1 et p_2 sont des diviseurs premiers distincts de n, alors les événements A_{p_1} et A_{p_2} sont indépendants.

Généraliser.

3. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que : $\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divisant } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

III Probas, assez proche du cours

Exercice 29

Soient A_n, $n \in \mathbb{N}$, des évènements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Donner l'écriture ensembliste des évènements suivants :

1. au moins un des A_n est réalisé ;

2. exactement un des A_n est réalisé ;

3. exactement p des A_n est réalisé ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé) ;

4. un nombre infini d'évènements A_n est réalisé.

Exercice 30

Montrer qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ (à déterminer) sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 5\,\mathbb{P}(n+2) = 6\,\mathbb{P}(n+1) - \mathbb{P}(n)\ .$$

Exercice 31

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $\mathbb{P}(\{1\}) = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n+1\}) = \frac{2}{n}\mathbb{P}(\{n\})$.

1. Pour quelle valeur de a définit – on ainsi une mesure de probabilité sur $\left(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right)\right)$?

2. Déterminer alors $\mathbb{P}\left(2\,\mathbb{N}^*\right)$, où $2\,\mathbb{N}^* = \left\{2\,n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 32

On lance indéfiniment un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note S_i et T_i l'évènement :

$$S_i\ :\ \text{" le } i^{\text{ième}} \text{ lancer amène un } 6 \text{ ", et } T_i\ :\ \text{" le } i^{\text{ième}} \text{ lancer amène un } 5 \text{ "}.$$

1. Ecrire à l'aide des évènements S_i et T_i les évènements :

A : " La première apparition du 6 a lieu *après* le $5^{\text{ième}}$ lancer ".

B : " La première apparition du 6 a lieu après la première apparition du premier 5 ".

C : " On obtient au moins un 5 et au plus un 6 ".

2. Déterminer les probabilités des évènements A, B, C.

Exercice 33

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p < \frac{2}{3}$. Dans un pays, la probabilité qu'une famille donnée ait exactement n enfants, $n \geq 1$, est égale à $\frac{1}{2}p^n$. En outre, pour chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est 1/2.

1. Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. On considère une famille de n enfants.

Calculer la probabilité pour que cette famille ait k garçons.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité qu'une famille ait k garçons.

Exercice 34

On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. Pour $k \in \{0, ..., N\}$, l'urne numéro k contient k boules blanches, et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, et on y prélève des boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité que les n premiers tirages amènent n boules blanches ?
2. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?
3. Sachant que les n premiers tirages ont amené n boules blanches, quelle est la probabilité qu'un tirage supplémentaire amène encore une boule blanche ?
4. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?

Exercices divers

Exercice 35

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une personne se trouve devant une porte fermée à clef (*ça c'est dommage…*).

   Elle dispose d'un trousseau de clefs (*ouf, on est sauvé !*) parmi lesquelles une seule ouvre la porte.

   Elle essaye les clefs au hasard, une après l'autre, en éliminant au fur et à mesure les clefs inadéquates.

   On suppose que le trousseau comporte n clefs.

   Quelle est, pour $k \in \{1, ..., n\}$, la probabilité p_k que la personne ouvre la porte au $k^{\text{ème}}$ essai ?
2. D'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n, on tire successivement p jetons .
   - **a.** Quelle est la probabilité pour que le $p^{\text{ième}}$ jeton porte un numéro supérieur ou égal aux numéros des $(p-1)$ premiers jetons tirés, si les tirages se font avec remise ?
   - **b.** Même question si l'on suppose maintenant que les tirages se font sans remise.
   - **c.** Déterminer la limite des probabilités trouvées précédemment lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 36

Un avion comporte p places et $n \leq p$ passagers entrent dans cet avion les uns après les autres. Le premier passager à rentrer dans l'avion se trompe et occupe une place autre que la sienne. Les passagers suivants occupent chacun à son tour leur place si elle est libre, et une place au hasard si elle est déjà occupée. Quelle est la probabilité que le dernier passager soit à sa place ?

Exercice 37

Deux personnes jouent à tour de rôle à un jeu où l'on a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de gagner et $\frac{1}{6}$ de perdre.

Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux joueurs perd ou gagne. Est-il plus avantageux de jouer en premier ou en deuxième ?

Exercice 38

Une urne contient une boule blanche. On effectue des tirages successifs à pile ou face : si on tire pile, on met une boule noire dans l'urne, si on tire face, on tire une boule de l'urne et le jeu s'arrête. Quelle est la probabilité de l'évènement : « le jeu s'arrête et la boule tirée est blanche » ?

Exercice 39

On dispose de deux jeux *identiques* de $n \in \mathbb{N}^*$ cartes chacun, dont les dos sont indiscernables.

Chacun de ces jeux est composé de n figurines représentant des animaux différents.

On choisit au hasard et simultanément une carte dans chaque jeu, formant ainsi une paire de cartes, mise de côté. On recommence cela n fois ; on dispose alors de n paires de cartes.

0. Rappeler la formule du crible (*hors-programme, mais que l'on admet dans cet exercice*).

1. Quelle est la probabilité que les n paires d'animaux soient reconstituées ?

2. Soit $k \in \{0, ..., n-1\}$, et k paires d'animaux **fixées**.

Quelle est la probabilité qu'au moins ces k paires d'animaux soient reconstituées ?

3. Montrer grâce à la formule du crible que la probabilité p_n qu'aucune paire d'animaux ne soit reconstituée est donnée par :

$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} p_n = e^{-1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n lettres $L_1, ..., L_n$ destinées respectivement aux personnes $P_1, ..., P_n$,

et n enveloppes $E_1, ..., E_n$ adressées aux personnes $P_1, ..., P_n$. On range chaque lettre dans une et une seule enveloppe.

a. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une personne reçoive la lettre qui lui est destinée?

b. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 40

Etant donné un nombre positif n, on procède à n jets successifs d'une pièce de monnaie, en notant à chaque jet le côté apparent : on obtient de cette façon un résultat d'épreuve ω, formé d'une suite de symboles F ou P. On désigne par Ω_n l'ensemble des épreuves possibles. Par exemple, $\omega = (FFPP)$ appartient à Ω_4.

1. Etant donnée une partie A de Ω_n, on pose : $\mathbb{P}_n(A) = \frac{1}{2^n}(\text{cardinal de } A)$

Montrer que $\mathbb{P}_n$ est une mesure de probabilités sur Ω_n.

On désigne maintenant par A_n l'ensemble des épreuves ω qui ne contiennent pas trois symboles

successifs F, et l'on pose : $u_n = \mathbb{P}_n(A_n)$. On a donc $u_1 = u_2 = 1$, et l'on convient que $u_0 = 1$.

2.a. Pour $n \geq 3$, montrer que A_n est partitionné par les ensembles :

$B_n = \{ \omega \in A_n \ / \ \omega \text{ commence par } P \}$

$C_n = \{ \omega \in A_n \ / \ \omega \text{ commence par } FP \}$

$D_n = \{ \omega \in A_n \ / \ \omega \text{ commence par } FFP \}$

b. En déduire la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{4} u_{n-2} + \frac{1}{8} u_{n-3}$, valable pour $n \geq 3$.

3.a. Montrer que pour z tel que $|z| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ converge. On note $f(z)$ sa somme.

b. Montrer, à l'aide du **2.b.**, que $f(z) = \frac{8 + 4z + 2z^2}{8 - 4z - 2z^2 - z^3}$.

Exercice 41

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne ; à chaque fois, on note son numéro, et on la remet dans l'urne. Pour $r \in \{1, ..., n\}$, on note E_r l'évènement « le numéro de la $r^{\text{ième}}$ boule tirée est inférieur ou égal aux numéros précédemment obtenus ».

1. Calculer $\mathbb{P}(E_2)$.

2. Déterminer $\mathbb{P}(E_r)$ sous forme de somme.

3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(E_r\right)$.

Exercice 42

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^2\left(\left[0,1\right], \mathbb{R}\right)$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \text{, et } \Pi_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\dots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\dots(4n-2)}.$$

1. Avec l'aide de Taylor & Laplace, montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$.

2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\Pi_n\right)$, puis $\lim_{n \to +\infty} \Pi_n$.

3. On considère une urne contenant initialement $2n+1$ boules identiques au toucher, dont une seule est rouge, et les autres noires. On effectue des tirages selon le schéma suivant : à chaque tirage, si l'on a tiré une boule noire, on la remet dans l'urne et on ajoute deux autres boules noires prises dans un stock annexe, avant de procéder au tirage suivant. La suite de tirages s'arrête lorsque l'on a obtenu la boule rouge. A_n est l'événement : « le $n^{\text{ième}}$ tirage est effectué ».

Calculer $p_n = \mathbb{P}\left(A_n\right)$, puis $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 43

On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N.

Pour $k \in \{0, ..., N\}$, l'urne numéro k contient k boules blanches, et $N-k$ boules noires.

On choisit une urne au hasard, et on y prélève des boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité que les n premiers tirages amènent n boules blanches ?

2. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?

3. Sachant que les n premiers tirages ont amené n boules blanches, quelle est la probabilité qu'un tirage supplémentaire amène encore une boule blanche ?

4. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?

Exercice 44

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On choisit au hasard une partie A de E. Soit $k \in \{0, ..., n\}$. Quelle est la probabilité que A soit de cardinal k ?

On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante deux parties A et B de E.

2. Quelle est la probabilité que ces parties soient disjointes ?

3. Quelle est la probabilité que A et B recouvrent E ?

Exercice 45

On s'intéresse aux répartitions possibles des sexes dans une famille de n enfants ($n \geq 2$).

On travaille avec l'espace probabilisé $\left(\Omega_n, \mathcal{P}\left(\Omega_n\right), \mathbb{P}\right)$ où $\Omega_n = \{F, G\}^n$, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. On introduit les événements : M_n : « une famille a des enfants des deux sexes », et F_n : « une famille a au plus une fille ».

1. On pose : $u_n = \mathbb{P}\left(M_n \cap F_n\right) - \mathbb{P}\left(M_n\right)\mathbb{P}\left(F_n\right)$. Calculer u_2 et u_3.

2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $u_n = \dfrac{2n+2-2^n}{4^n}$.

3. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles M_n et F_n sont indépendants ?

Exercice 46

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n joueurs $J_1, J_2, ..., J_n$ jouant l'un après l'autre dans l'ordre de leurs indices.

A chaque joueur J_k est imparti un événement A_k dont la probabilité de réalisation est un réel $p_k \in \left]0, 1\right[$. On notera $q_k = 1 - p_k$, et l'on pose $q_0 = 1$. Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs réalise l'événement qui lui est imparti.

Lorsqu'aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour, puis si de nouveau aucun joueur n'a gagné, on recommence un tour, *and so on*,…

On note G_k l'événement « le joueur J_k gagne », et l'on suppose l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués.

1. Déterminer la probabilité de G_k en fonction des réels $\left(q_j\right)_{j \in \; 0, n}$.

2. Montrer que le jeu se termine presque sûrement après un nombre fini de coups.

3. Le jeu est dit ***équitable*** lorsque chaque joueur a la même probabilité de gagner.

Déterminer une CNS sur les réels $\left(p_k\right)_{k \in \; 0, n}$ pour que le jeu soit équitable.

On suppose désormais que le jeu est équitable.

4.a. Montrer que $p_1 \leq \dfrac{1}{n}$.

b. On suppose que $p_1 = \dfrac{1}{n}$. Pour $k \in \; 2, n$, déterminer p_k.

5. Soit X la VAR égale au nombre de coups joués jusqu'à la fin du jeu. Déterminer l'espérance de X.