Lycée Lakanal

2025 – 2026

PC

Feuille d'exercices

Dénombrement

Exercice 1

On tire simultanément 6 cartes d'une jeu de tarot – constitué de 78 cartes, parmi lesquelles 21 atouts, la carte qu'on appelle l'excuse, et 14 cartes par couleur, sachant qu'il y a 4 couleurs comme toujours.

Combien de tirages peut – on obtenir contenant exactement :

1. 2 atouts et 4 trèfles ?

2. Au moins 2 atouts ?

3. Au plus un trèfle et au moins deux atouts ?

4. Au moins deux trèfles ou au moins deux piques ?

Exercice 2

Soit r un entier naturel non nul, et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls. On considère un mot contenant, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, α_k fois la lettre L_k. Déterminer le nombre d'anagrammes de ce mot.

Exercice 3

Soit A l'ensemble des entiers appartenant à $\{1, ..., 1000\}$ et qui sont divisibles par au moins l'un des entiers 2, 3 et 5. Déterminer le cardinal de A.

Exercice 4

1. Soit n un entier naturel non nul, et soit E un ensemble de cardinal $2n$.

On appelle ***partition par paires*** de E tout ensemble $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, où les p_k sont des paires d'éléments de E, deux à deux disjointes. Déterminer le nombre de partitions par paires de l'ensemble E.

2. On organise un tournoi de tennis (en simple).

Ce tournoi réunit 2^n participants.

a. De combien de façons peut – on organiser le premier tour ?

b. Combien y aura – t – il de matches lors de ce tournoi ?

Exercice 5

Un casier à crevettes est constitué de n cases, contenant chacune une crevette.

En apercevant une sauce mayonnaise, les crevettes sautent toutes en même temps et atterrissent chacune dans n'importe quelle case, choisie au hasard par chaque bestiole. Quelle est la probabilité qu'après la crise :

1. Toutes les cases soient à nouveau occupées ?

2. Une seule case soit vide ?

Exercice 6

On place sur une étagère n_1 exemplaires d'un livre L_1, n_2 exemplaires d'un livre L_2. Les places sur l'étagère sont numérotées de 1 à n, avec $n = n_1 + n_2$.

1. Combien y a – t – il de rangements possibles ?

On suppose maintenant qu'il y a p livres différents, le livre N° k (livre L_k) étant disponible en n_k exemplaires, avec $n = \sum_{k=1}^{p} n_k$.

2. Combien y a – t – il de rangements possibles ? Même question dans le cas particulier où les nombres n_k sont tous égaux.

Exercice 7

On dispose d'un damier rectangulaire formé de $n \times 2$ cases (2 lignes, n colonnes), et de dominos indifférenciés de 1×2 cases.

On recouvre le damier de dominos de manière à ce que chaque case soit recouverte par un et un seul domino.

1. Combien y a – t – il de manière de procéder lorsque $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$?

2. On note $A(n)$ le nombre de recouvrements possibles pour un damier de taille $n \times 2$.

Donner une relation de récurrence entre $A(n+2)$, $A(n+1)$, $A(n)$.

3. Exprimer $A(n)$ en fonction de n.

Exercice 8

Soient m et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Le lycée Lakanal est entouré par m murs, et l'on dispose de p couleurs différentes. On souhaite repeindre les m murs de telle sorte que deux murs consécutifs ne soient jamais de la même couleur. On note alors $\pi_{m,p}$ le nombre de façons de procéder de la sorte.

1. Calculer $\pi_{2,p}$ (*ça a un sens : les murs peuvent être courbés*) et $\pi_{3,p}$.

2. Etablir la relation de récurrence suivante : $\forall\ m \geq 2$, $\pi_{m+2,p} = (p-2)\,\pi_{m+1,p} + (p-1)\,\pi_{m,p}$.

3. En déduire, pour tous $(m, p) \in [\![2, +\infty [\![^2$, la valeur de $\pi_{m,p}$.

Exercice 9

1. $2n$ personnes doivent prendre place autour d'une table ronde. De combien de manières peuvent – elles s'asseoir ?

(*seules comptent les positions relatives des invités les uns par rapport aux autres : deux dispositions sont déclarées identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite*).

2. On suppose de plus qu'il y a n hommes et n femmes.

De combien de manières peuvent – ils s'asseoir en respectant l'alternance ?

Exercice 10

Lemme linéaire de Kaplanski

1. Dénombrer les k – uplets d'entiers $(i_1, \dots, i_k)$ tels que : $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

2. On note E l'ensemble des k – uplets d'entiers naturels $(i_1, \dots, i_k)$ tels que $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$,

et F l'ensemble des k – uplets d'entiers $(j_1, \dots, j_k)$ tels que $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n + k - 1$.

Montrer que l'application : $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ (i_1, \dots, i_k) & \mapsto & (j_1, \dots, j_k) = (i_1, i_2 + 1, \dots, i_k + k - 1) \end{array} \right.$

(*autrement dit*, $\forall\ p \in \{1, \dots, k\}$, $j_p = i_p + p - 1$) est une bijection de E sur F .

En déduire le cardinal de l'ensemble E .

Exercice 11

Soit E un ensemble de cardinal n. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

1. On considère un sous – ensemble X de E de cardinal k .

Combien existe – t – il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = X$?

2. Combien existe – t – il de couples (A, B) de parties de E tels que $\text{card}(A \cap B) = k$?

3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))} \text{card}(A \cap B)$.

4. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))} \text{card}(A \cup B)$.

Exercice 12

Un individu a barboté un nombre infini de billets de 30 euros, de 15 euros et de 1 euro. Pris peut – être d'une crise de conscience inhabituelle, ou s'étant plus vraisemblablement rendu compte que certains de ces billets pourraient bien être des faux, il décide de reverser à une œuvre caritative une somme de 2100 euros, contre crédits d'impôts. De combien de façons peut – il payer cette somme ? *On considérera que deux remboursements sont différents si le nombre de billets de* 30 *, de* 15 *ou de* 1 *euros utilisés sont différents.*

Exercice 13

Théorème de Cantor

On souhaite montrer qu'un ensemble E n'est jamais en bijection avec $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble de ses parties. Pour cela, on raisonne par l'absurde, et l'on considère un ensemble E (fini ou infini). On suppose qu'il existe une bijection f de E vers $\mathcal{P}(E)$. On note alors : $S = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$, et $s = f^{-1}(S)$. Montrer que s n'appartient ni à S, ni à $\overline{S}$. Conclure.

Exercice 14

Partitions et nombres de Bell

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et X_n un ensemble de cardinal n. On appelle ***partition*** de X_n tout ensemble $\{A_1, ..., A_k\}$ de parties de X_n non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est X_n. On note π_n le nombre de partitions de X_n. *Ce nombre* π_n *s'appelle* ***nombre de Bell d'indice n***. On conviendra pour la suite que $\pi_0 = 1$.

Q1_ Calculer π_1, π_2, et π_3.

Q2_ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X_n un ensemble de cardinal n, et a un élément fixé de X_n.

Soit $\mathcal{P} = \{A_1, ..., A_k\}$ une partition quelconque de X_n. On suppose que A_1 est l'unique terme de $\mathcal{P}$ contenant a. En raisonnant sur le cardinal de A_1, montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} \pi_{n-p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \pi_k .$$

Q3_ Vérifier alors les résultats de **Q1_**, et calculer π_4, et π_5.

Exercice 15

On considère un entier $m \geq 2$ et un ensemble $X = \{x_1, ..., x_m\}$ de cardinal m.

Soit $n \geq 2$ un autre entier, et $A_1, A_2, ..., A_n$ des parties de X vérifiant les propriétés suivantes :

- • Les n parties $A_1, A_2, ..., A_n$ sont deux à deux distinctes.
- •• Les n parties $A_1, A_2, ..., A_n$ ont même cardinal, noté a.
- ••• Toutes les intersections $A_i \cap A_j$, pour $(i, j) \in [1, n]^2$ avec $i \neq j$, ont même cardinal, noté b.

*On souhaite démontrer l'**inégalité de Fisher** :* $n \leq m$.

Soit $B = \left(b_{i,j} \right)_{(i,j) \in [1,n] \times [1,m]} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall \, (i,j) \in [1,n] \times [1,m] \, , \, b_{i,j} = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x_j \in A_i \\ 0 & \text{si} \quad x_j \notin A_i \end{array} \right. .$$

1. Déterminer la matrice $M = B \, . \, {}^t B$.

2. Déterminer le spectre de la matrice M.

3. Montrer que $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. Conclure.

Exercice 16

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Dénombrer les couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

Exercice 17

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ où l'on identifie le Nord à la direction donnée par le vecteur $(0, 1)$ et l'Est celle donnée par le vecteur $(1, 0)$.

Une puce se déplace à partir du point $(0, 0)$ par des sauts successifs, de longueur 1, dont la direction ne peut être que le nord ou l'est.

Q0_ Donner la nouvelle position de la puce après qu'elle ait effectué les sauts *NENNNEEEENNN*.

Q1_ Calculer, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ fixés, le nombre (p, q) de chemins possibles joignant le point $(0, 0)$ au point (p, q).

Dans la suite, on suppose que $1 \leq q < p$, et l'on cherche à dénombrer différents types de chemins joignant $(0, 0)$ à (p, q).

Q2_ Calculer le nombre $C_N \, (p, q)$ de chemins commençant par le Nord.

Soit C_N et C_E l'ensemble des chemins qui retouchent la première bissectrice, le premier commençant par le Nord, et second par l'Est.

Q3_ Montrer qu'ils ont même cardinal.

Q4_ Quel est le nombre de chemins joignant $(0, 0)$ à (p, q) sans jamais retoucher la première bissectrice ?

Q5_ Lors d'une élection, deux candidats A et B ont récolté respectivement p et q voix.

On dépouille ces voix une à une, quelle est la probabilité pour que le candidat A reste en tête tout au long du dépouillement?

Exercice 18

Démontrer par un raisonnement combinatoire :

- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications f de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., n\}$ telles que $f \circ f = f$.