PC - Lakanal

2025 - 2026

Résumé du cours de 1 ère année

Dénombrement

1 Rappels de théorie des ensembles

1_ *Rappel sur les applications*

Vérifiez que vous maîtrisez les définitions suivantes, données pour une application f d'un ensemble E vers un ensemble F.

• L'application f est dite ***injective*** si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}.$$

En langage usuel, cela revient à dire qu'un élément de F admet au plus un antécédent par f, ou encore que deux éléments distincts de E ont des images différentes par f.

•• L'application f est dite ***surjective*** lorsque :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)}.$$

En langage usuel, tout élément de F admet ***au moins*** *un antécédent par f.*

••• L'application f est dite *bijective* lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

Cela revient donc à dire que tout élément de F admet ***exactement*** *un antécédent par f.*

Il est alors clair que la bijectivité de f se traduit comme suit à l'aide de quantificateurs :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)}.$$

Proposition – définition

> Soient E et F deux ensembles, et f une application de E vers F.
>
> • L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F vers E telle que : $g \circ f = Id_E$ <u>et</u> $f \circ g = Id_F$.
>
> •• Lorsque tel est le cas, une telle application g est alors **unique**. Cette application est également bijective, de F vers E. Elle est appelée *bijection réciproque* de f, et est notée f^{-1}.

2_ *Ensembles finis ou dénombrables*

a_ *Ensembles finis*

Définition :

> Un ensemble E est dit ***fini, de cardinal*** p, si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme $E = \{ x_n \ / \ n \in 1, p \}$, avec des éléments x_n deux à deux distincts.

Autrement dit, E est fini de cardinal p ss'il existe une bijection $\left\{ \begin{array}{ll} 1, p & \to E \\ n & \mapsto x_n \end{array} \right.$ de $1, p$ sur E.

Exemple : Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, l'ensemble $\quad a , b \quad$ est fini, de cardinal $b - a + 1$.

b_ *Ensembles dénombrables*

Définition

> Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il peut s'écrire sous la forme $E = \left\{ x_n \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$ avec des éléments x_n deux à deux distincts. On peut alors énumérer ses éléments sous la forme d'une suite $\left(x_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Autrement dit, E est dénombrable si et seulement si il existe une bijection $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to E \\ n \mapsto x_n \end{array} \right.$ de $\mathbb{N}$ sur E.

Exemples

- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ sont clairement dénombrables.

•• De même, $\mathbb{Z} = \left\{ 0, 1, -1, 2, -2, ..., n, -n, \ ... \right\}$ est dénombrable.

••• On peut montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \left\{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), ... \right\}$ est lui aussi dénombrable.

•••• Il est plus difficile de prouver que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas, de même que tout intervalle réel non vide $\left] a, b \right[$.

c_ *Propriétés des ensembles finis*

Proposition **1**

> Soit E et F deux ensembles finis, <u>de même cardinal</u>, et f une application de E vers F. Alors :
>
> $$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}.$$

La proposition suivante est un résumé des principales propriétés des cardinaux vues en première année :

Proposition **2**

> Soient A, B deux ensembles finis, et $\left(A_i \right)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles finis. Alors :
>
> **1_** Si A et B sont **disjoints**, alors : $\text{card}\left(A \cup B \right) = \text{card}\left(A \right) + \text{card}\left(B \right)$.
>
> **2_** $\text{card}\left(A \setminus B \right) = \text{card}\left(A \right) - \text{card}\left(A \cap B \right)$. *Rappel :* $A \setminus B = \left\{ a \in A \ / \ a \notin B \right\}$.
>
> En particulier, si $B \subset A$, alors $\text{card}\left(A \setminus B \right) = \text{card}\left(A \right) - \text{card}\left(B \right)$.
>
> **3_** Si A est un sous – ensemble d'un ensemble E fini, et si $\overline{A}$ désigne son complémentaire dans E, alors : $\text{card}\left(\overline{A} \right) = \text{card}\left(E \right) - \text{card}\left(A \right)$.
>
> **4_** <u>*Formule des quatre cardinaux :*</u> $\boxed{\text{card}\left(A \cup B \right) = \text{card}\left(A \right) + \text{card}\left(B \right) - \text{card}\left(A \cap B \right)}$.
>
> **5_** <u>*Formule du crible de Poincaré **(hors-programme)** :*</u>
>
> $$\boxed{\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(-1 \right)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \text{card}\left(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} \right) \right) \right)} .$$
>
> **6_** $A \times B$ est un ensemble fini, et $\text{card}\left(A \times B \right) = \text{card}\left(A \right) . \text{card}\left(B \right)$.
>
>  Plus généralement : $\text{card}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i \right) = \prod_{i=1}^{n} \text{card}\left(A_i \right)$.
>
> Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\text{card}\left(A^k \right) = \left(\text{card}\left(A \right) \right)^k$.

2 Principes du dénombrement

1_ Utilisation d'un partage de E

Proposition **1**

Soient E un ensemble fini, et $\left(A_i \right)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de parties de E telle que

- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

•• $\forall \left(i, j \right) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \bigcap A_j = \varnothing$,

alors : $\boxed{\operatorname{card}\left(E \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \operatorname{card}\left(A_i \right)}$.

Dans cette situation, les cardinaux s'ajoutent …

En particulier :

Proposition **2** : *lemme des bergers*

Si les n sous – ensembles A_i de E ont même cardinal c , sont disjoints, et ont pour réunion E , alors :

$$\operatorname{card}\left(E \right) = n \cdot c \ .$$

2_ Représentations arborescentes et choix multiples

Il est possible de schématiser une suite de choix successifs à l'aide d'un arbre, dont chaque branche représente une suite de choix possibles. Compter le nombre de suites de choix possibles revient alors à compter le nombre de branches de l'arbre. Une telle représentation doit s'appuyer sur un raisonnement clair :

Une représentation arborescente peut appuyer un raisonnement, mais pas tenir lieu de rédaction... et certainement pas remplacer une formule des probabilités totales correctement justifiée !

3 p – listes d'un ensemble à n éléments

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une p – *liste* ou un p – *uplet* d'éléments d'un ensemble E est un élément du produit cartésien E^p .

Une p – liste est notée $\left(x_1, \ldots, x_p \right)$.

Il s'agit donc d'un objet mathématique *ordonné* et *avec des répétitions possibles*.

Proposition **1**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Alors le nombre de p – listes d'éléments de E est n^p .

Il s'agit tout simplement du dénombrement de E^{p}, qui a été rappelé avant. On peut aussi raisonner comme suit : on a n choix pour la première composante de la p – liste. Pour chacun de ces choix, on a à nouveau n choix pour la seconde composante. Et ainsi de suite…

Proposition **2**

Soit A un ensemble fini de cardinal p, et B un ensemble fini de cardinal n.

Alors le nombre d'applications de A vers B est égal à n^{p}.

Il suffit en effet de remarquer qu'une application de A vers B est entièrement déterminée par la donnée des images des éléments $a_1, \dots, a_p$ de l'ensemble A, et que, pour chacun de ces éléments, on a n images possibles.

Corollaire **1**

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^{*})^{2}$.

Le nombre de dispositions de p boules discernables dans n boîtes discernables est n^{p}.

La situation est identique à ce qui précède, sous une forme un peu différente. On a n placements possibles pour la boule numéro 1. Pour chacun de ces placements, on a n placements possibles pour la boule numéro 2, et ainsi de suite…

Corollaire **2**

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^{*})^{2}$.

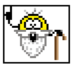
Le nombre de tirages *avec remise* de p boules dans une urne qui contient n boules discernables est n^{p}.

Le raisonnement est analogue au précédent : on commence par choisir la première boule tirée, on a n choix possibles ; on choisit ensuite la deuxième boule tirée, et on a à nouveau n choix possibles, etc.

4 $\quad p$ – arrangements d'un ensemble à n éléments

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^{*}$. Un p – *arrangement* d'éléments d'un ensemble E est une p – liste d'éléments deux à deux *distincts* de E.



Il s'agit donc d'un objet mathématique *ordonné* et *sans répétition*.

Proposition **1**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^{*}$, et soit $p \in \mathbb{N}^{*}$.

On note A_n^p le nombre de p – arrangements de l'ensemble E. Alors :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

On peut raisonner comme ci – dessus. On a n choix pour la première composante du p – arrangement. Pour chacun de ces choix, on a alors $n-1$ choix pour la seconde composante (il ne faut pas reprendre l'élément de E déjà utilisé). Puis $n-2$ choix pour la troisième composante, et ainsi de suite… On aura alors en fin de chaîne $n-p+1$ choix pour la $p^{\text{ème}}$ et dernière composante.

On peut décliner le dénombrement que nous venons d'effectuer sous différentes formes. C'est un bon exercice que de rédiger des preuves pour chacune de ces déclinaisons. Vous constaterez alors sans mal que l'idée fondatrice de la preuve est toujours la même.

Corollaire **1**

Soit A un ensemble fini de cardinal p, et B un ensemble fini de cardinal n.

Alors le nombre d'injections de A dans B est égal à A_n^p.

Corollaire **2**

Soit $(n, p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$.

Le nombre de tirages *une à une et sans remise* de p boules d'une urne qui contient initialement n boules discernables est égal à A_n^p.

5 *permutations d'un ensemble à n éléments*

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *permutation* de E tout n – arrangement d'éléments de E.

Il s'agit d'un cas particulier d'arrangement, et donc d'un objet mathématique *ordonné* et *sans répétition*.

Les propositions qui suivent ne sont rien d'autre que des cas particuliers des propositions correspondantes de la section précédente.

Proposition **1**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de permutations de l'ensemble E est égal à $n!$.

Proposition **2**

Soient A et B deux ensembles finis de cardinal n.

Alors le nombre de bijections de A dans B est égal à $n!$.

6 $\quad k$ – combinaisons d'un ensemble à n éléments

Proposition **1**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est donné par $\boxed{\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$.

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle k – *combinaison* d'éléments de E toute partie à k éléments de E. Une k – combinaison est notée $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Il s'agit donc d'un objet mathématique *non – ordonné* et *sans répétition*.

Proposition **2**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de k – combinaisons de l'ensemble E. Alors : $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$.

Proposition **3**

Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Le nombre de tirages *en simultané* ou *« par poignées »* de k boules dans une urne qui contient n boules discernables est égal à $\binom{n}{k}$.

En effet, choisir une poignée de k boules dans l'urne, c'est choisir une partie à k éléments d'un ensemble qui en contient n, et l'on est ramené à ce qui précède.

La proposition suivante est importante. On a souvent besoin de son résultat, qui permet d'ailleurs de dénombrer les termes des différentes sommes intervenant dans la formule du crible de Poincaré.

Proposition 2

Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors,

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,/\, 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n\right\}\right) = \binom{n}{k}}.$$

<u>*Preuve*</u>

Notons $F = \left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,/\, 1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n\right\}$, et $\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$ l'ensemble des k – combinaisons d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

Soit $(x_1, \dots, x_k)$ un élément de F. Ses composantes sont dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$; on peut associer à $(x_1, \dots, x_k)$ l'ensemble $\{x_1, \dots, x_k\} = \varphi(x_1, \dots, x_k)$, qui appartient donc à $\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$.

On considère alors l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} F & \to & \mathcal{P}_k([\![1, n]\!]) \\ (x_1, \dots, x_k) & \mapsto & \{x_1, \dots, x_k\} \end{array}\right.$. Cette application est bijective. En effet, si l'on se donne une partie à k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, disons $\{y_1, \dots, y_k\}$, il existe une unique manière de ranger les éléments de cette partie en ordre strictement croissant, ce qui signifie bien que $\{y_1, \dots, y_k\}$ admet un unique antécédent dans F par φ. Ainsi, l'application φ est une bijection de F sur $\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$, d'où il résulte que le cardinal de F est le même que celui de $\mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$, à savoir $\binom{n}{k}$.

7 Combinatoire

La proposition ci – dessous résume les propriétés principales des coefficients binomiaux.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

1_ $$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n \end{cases}.$$

2_ $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

3_ <u>*Formule d'Euler :*</u> $$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

4_ <u>*Formule de Pascal :*</u> $$\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}.$$

On doit également savoir démontrer la formule de Pascal généralisée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, p \geq n\,,\ \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

5_ <u>*Formule du binôme de Newton :*</u>

$$\boxed{\forall\,(a\,,b) \in \mathbb{C}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}.$$

En particulier :

i) $$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

ii) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

C'est le dénombrement de $\mathcal{P}(E)$ si $\operatorname{card}(E) = n$.

iii) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

6_ <u>*Formule de Vandermonde :*</u>

$$\boxed{\forall\,(a, b, n) \in \mathbb{N}^3, \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \sum_{p+q=n} \binom{a}{p}\binom{b}{q}}.$$

8 Un ajout, et un petit bilan

L'ajout :

Exercice

Combinaisons avec répétition : la méthode des trous de Kaplansky

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Dénombrer l'ensemble $E_n^p = \left\{ (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{N}^p \ / \ 1 \leq x_1 < ... < x_p \leq n \right\}$.

2.a. Soit $F_n^p = \left\{ (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{N}^p \ / \ 1 \leq x_1 \leq ... \leq x_p \leq n \right\}$.

Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} F_n^p & \to & E_{n+p-1}^p \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & (y_1, ..., y_p) = (x_1, x_2 + 1, ..., x_p + p - 1) \end{array}$$

(*i.e.* $\forall k \in [1, p]$, $y_k = x_k + k - 1$) est une bijection de F_n^p sur E_{n+p-1}^p.

2.b. En déduire le cardinal de l'ensemble F_n^p .

3. Soit $G_n^p = \left\{ (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{N}^p \ / \ \sum_{k=1}^{p} x_k = n \right\}$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} G_n^p & \to & F_{n+1}^{p-1} \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & (y_1, ..., y_{p-1}) = \left(1 + x_1, 1 + \sum_{k=1}^{2} x_k, ..., 1 + \sum_{k=1}^{p-1} x_k \right) \end{array}$$

est une bijection de G_n^p sur F_{n+1}^{p-1} . En déduire le cardinal de l'ensemble G_n^p .

4. Soit E un ensemble de cardinal n . Combien y a-t-il de façons de choisir avec répétition p éléments de E ? (On peut choisir plusieurs fois le même élément, et l'ordre ne compte pas : seul compte combien de fois on a choisi l'élément d'indice 1, l'élément d'indice 2, …, l'élément d'indice n .

Le bilan :

NOMBRE	OBJETS	NOTATION
n^p est le nombre de	• choix successifs avec remise de p éléments de E_n • listes à répétition de p éléments de E_n • applications de $\mathbb{F}_p$ dans E_n	$(E_n)^p$
A_n^p est le nombre de	• choix successifs sans remise de p éléments de E_n • listes de p éléments distincts de E_n • applications injectives de $\mathbb{F}_p$ dans E_n	$\mathscr{A}(p, E_n)$
$\binom{n}{p}$ est le nombre de	• choix simultanés sans remise de p éléments de E_n • listes strictement croissantes de p éléments de E_n • parties à p éléments de E_n	$\mathscr{C}(p, E_n)$
Γ_n^p est le nombre de	• combinaisons à répétition de p éléments de E_n • listes croissantes de p éléments de E_n • listes à n éléments qui vérifient $m_1 + \cdots + m_n = p$	$\mathscr{G}(p, E_n)$