PC - Lakanal

2025- 2026

Programme de colles S12

du 05 – 01 au 09 – 01

Séries entières

I SÉRIES ENTIÈRES : DÉFINITION, CONVERGENCE

1. **Définition**
2. **Convergence d'une série entière**
   a. Lemme d'Abel ; rappel sur la règle de d'Alembert
   b. Rayon de convergence, disque ouvert ou intervalle ouvert de convergence

   L'étude aux bornes du domaine de convergence "n'est pas un objectif du programme".

   Propriétés de base : si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R :

   Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

   Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

   Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est telle que $\left(a_n z_0^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors le rayon de convergence de cette série entière vérifie $R \geq |z_0|$. Si $\left(a_n z_0^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, $R \leq |z_0|$. Si $a_n = O\left(n^\alpha b_n\right)$, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ st supérieur ou égal à celui de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, etc.
3. **Opérations algébriques**

II DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE USUELS

III RÉGULARITÉ D'UNE SOMME DE SÉRIE ENTIÈRE

1. **Convergence normale sur tout compact du domaine ouvert de convergence**

   Corollaire : continuité de la fonction somme sur le disque ouvert, ou l'intervalle ouvert, de convergence.
2. **Développement limité**

   Corollaire 1: unicité, sous réserve d'existence, du développement en série entière.

   Corollaire 2 : développement en série entière d'une fonction paire ou impaire.

Pour des séries entières d'une variable **réelle** :

3. **Intégration terme à terme et primitivation**
4. **Dérivation terme à terme -** généralisation à une dérivée p – ème.

IV SÉRIES DE TAYLOR

0. Formule de Taylor avec reste intégral.
1. Définition de la série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0.
2. Si f est développable en série entière en 0, alors son développement est sa série de Taylor. En revanche, la série de Taylor de f en 0 peut être de rayon de convergence non nul, sans que f ne soit développable en série (contre-exemple à connaître).
3. Utilisation de formules de Taylor avec reste intégral pour prouver une développabilité en série entière.

Questions de cours fléchées (*toutes avec preuves demandées bien sûr*).

1. Formule de Taylor avec reste intégral (avec preuve).

2. Lemme d'Abel.

3. Règle de D'Alembert pour les séries entières.

4. DSE de $x \mapsto (1 + x)^{\alpha}$ (on a insisté sur le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$ pour avoir le rayon de convergence 1 ; mais on a compris que pour $\alpha \in \mathbb{N}$ c'est juste la formule du binôme).

5. Caractère C^{∞} d'une fonction somme de série entière d'une variable réelle, sur son intervalle ouvert de convergence.

6. DSE de $z \mapsto \exp(z)$ (cas réel via étude de $t \mapsto \exp(t)$, , cas, complexe en considérant $t \mapsto \exp\left(t\, e^{i\theta}\right)$).

7. DSE des dérivées formelles successives de $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$ (via étude de $t \mapsto \dfrac{1}{1 - t\, e^{i\theta}}$, t variable réelle).

Prévisions pour la semaine suivante : variables aléatoires (début)