## PC LAKANAL - DM4 2025 2026 - VERSION HARD

Ce sujet en trois parties étudie la convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange sous différentes hypothèses et aborde le phénomène de Runge.

La partie I est consacrée à l'étude de deux familles de polynômes, les polynômes de Lagrange et les polynômes de Tchebychev.

La partie II donne des résultats généraux de convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ; elle utilise également quelques résultats de la partie I.

Enfin la partie III présente le phénomène de Runge. Elle s'appuie sur les sous-parties III.A et III.B, qui portent sur une intégrale généralisée et sont indépendantes des parties I et II.

**Notations**

Si $k_1$ et $k_2$ sont deux entiers tels que $k_1 \leqslant k_2$, on note $[\![k_1, k_2]\!]$ l'ensemble des entiers $k$ tels que $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$. Pour tout réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n$.

# I. Étude de deux familles de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de $n$ réels deux à deux distincts.

Pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, on note $L_i$ le polynôme de degré $n-1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}. \tag{I.1}$$

On dit que $L_1, \dots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$.

### I.A - Polynômes de Lagrange

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k) Q(a_k) \end{array} \right.$$

**Q1.** Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**Q2.** Montrer que, pour tout $i$ et $k$ dans $[\![1, n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q3.** Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle L_i, P \rangle = P(a_i).$$

**Q4.** Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

**Q5.** En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

**Q6.** Montrer que, pour tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n-2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_i - a_j)} = 0.$$

**I.B - Polynômes de Tchebychev**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p.$$

**Q7.** En développant $(1+x)^n$ pour deux réels $x$ bien choisis, montrer que

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

**Q8.** Montrer que $T_n$ est un polynôme de degré $n$. Expliciter le coefficient dominant de $T_n$.

**Q9.** Montrer que $T_n$ est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

**Q10.** Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Montrer que

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - y_{k,n})$$

**I.C -** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $W$ un polynôme unitaire de degré $n$. L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \tag{I.2}$$

puis d'étudier dans quel cas il y a égalité.

**Q11.** Montrer que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$. En déduire un polynôme unitaire de degré $n$ réalisant le cas d'égalité dans (I.2).

On pose $Q = \frac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

**Q12.** Montrer que $Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

**Q13.** Dans cette question, on montre (I.2) par l'absurde.

— Si on suppose que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$.

— En déduire une contradiction et conclure.

On suppose maintenant que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$

**Q14.** Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\frac{Q(z_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)} \geqslant 0.$$

**Q15.** En déduire que $Q = 0$, puis que $W = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$.

On pourra considérer la somme des inégalités de la question précédente et exploiter la question 6 appliquée à des données convenables.

## II. Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

### II.A - Interpolation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Dans cette sous-partie, $n$ est un entier naturel non nul et $I$ est un segment $[a,b]$ où $a < b$. On considère $n$ nombres réels distincts $a_1 < \cdots < a_n$ de $I$.

On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \ldots, a_n$ définis par (I.1) et on note $W = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$.

Pour toute fonction $f$ définie sur $I$, le polynôme

$$\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)L_i \tag{II.1}$$

est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On l'appelle polynôme interpolateur de Lagrange de $f$ associé à $a_1, \ldots, a_n$.

**Q16.** Soit $r$ une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et s'annulant en $n+1$ points distincts de $I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.

**Q17.** Soit $f$ une fonction à valeurs réelles de $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Soit $P = \Pi(f)$ le polynôme interpolateur de $f$ associé aux réels $a_1, \ldots, a_n$ comme défini en (II.1) ci-dessus. Pour tout $x \in I$, montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,W(x).$$

Pour $x$ distinct des $a_i$, on pourra considérer la fonction $r$ définie sur $I$ par

$$r(t) = f(t) - P(t) - K\,W(t)$$

où le réel $K$ est choisi de façon que $r(x) = 0$.

**Q18.** En déduire que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_n\,(b-a)^n}{n!}$$

où $M_n = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

### II.B - Suites de polynômes interpolateurs

On considère encore un segment $I$ et une fonction $f$ définie sur $I$.

De plus, pour tout entier naturel non nul $n$, on suppose donnés des réels distincts $a_{1,n} < \cdots < a_{n,n}$ de $I$ et on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de $f$ associé à ces réels $a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$.

En notant $L_{1,n}, L_{2,n}, \ldots, L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés à $a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$ on a donc

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,n}) L_{i,n} \tag{II.2}$$

et $\Pi_n(f)$ est l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n(a_{i,n}) = f(a_{i,n})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On s'intéresse à la convergence uniforme sur $I$ vers $f$ de la suite de polynômes $(\Pi_n(f))$ pour divers exemples de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

### II.B.1) Convergence uniforme vers la fonction exponentielle

Dans cette section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et $f$ est la restriction à $I$ de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \exp(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme défini par (II.2).

**Q19.** Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $I$.

**Q20.** Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers $f$ sur $I$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $Q_n$ ne coïncide avec $f$ en aucun point de $I$, sauf peut-être en zéro :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I \setminus \{0\}, \quad Q_n(x) \neq \exp(x)$$

### II.B.2) Convergence uniforme vers une fonction rationnelle

Dans cette section, $a$ est un réel strictement positif et $I = [-a, a]$. Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

**Q21.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ et tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$f^{(k)}(\tan t) = k!\, \cos^{k+1}(t)\, \cos\left((k+1)t + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de $f$ sur $I$ défini par (II.2).

**Q22.** Montrer que, si $a < \dfrac{1}{2}$, la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a, a]$

### II.B.3) Cas de la somme d'une série entière

Soit $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose,

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad \text{et} \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

**Q23.** Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ]-1, 1[, \qquad g^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

**Q24.** Soit $r \in ]0, R[$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |c_k| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

**Q25.** En déduire que pour tout $x \in ]-r, r[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, r\, C}{(r-|x|)^{n+1}}.$$

**Q26.** On suppose que $a < \dfrac{R}{3}$. Montrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\Pi_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a, a]$.

### II.B.4) Interpolation aux points de Tchebychev

Cette section reprend l'étude des deux sections précédentes dans le cas de points d'interpolation particuliers, liés aux racines des polynômes de Tchebychev. On considère $a > 0$ et $I = [-a, a]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points de Tchebychev d'ordre $n$ dans $I$ sont :

$$a^*_{k,n} = a \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!].$$

On pose $W^*_n(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a^*_{k,n})$.

Si $f$ est une fonction définie sur $I$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit comme au (II.2) le polynôme interpolateur $P^*_n = \Pi^*_n(f)$ de $f$ aux points de Tchebychev d'ordre $n$.

C'est l'unique polynôme $P^*_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P^*_n(a^*_{k,n}) = f(a^*_{k,n})$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

**Q27.** Pour tout $x \in [-a, a]$, montrer que $|W^*_n(x)| \leqslant 2\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$.

**Q28.** On reprend dans cette question la fonction $f$ étudiée dans la section II.B.2 : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, si $a < 2$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a, a]$.

**Q29.** On reprend dans cette question la fonction $f$ somme de série entière étudiée dans la section II.B.3. Montrer que, si $a < \dfrac{2R}{3}$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a, a]$.

## III. Phénomène de Runge

### III.A - Étude d'une intégrale généralisée

Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$.

**Q30.** Montrer que $h_\alpha$ est une fonction continue décroissante intégrable sur $[0, 1[$.

On pose $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

**Q31.** Justifier que

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

**Q32.** En déduire que $J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha \arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

**Q33.** Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in ]0, \gamma[$, $J_\alpha > 0$.

### III.B - Application à une somme de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0,1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, par $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n}\left(h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + h_\alpha\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right).$$

**Q34.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant S_n(h_\alpha) \leqslant \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Q35.** En déduire que la suite $(S_n(h_\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $J_\alpha$.

**Q36.** Montrer que, pour $\alpha \in ]0, \gamma[$, la suite $\left(\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

### III.C - Le phénomène de Runge

Dans cette sous-partie $I = [-1,1]$ et $\alpha > 0$. On considère

$$f_\alpha : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\alpha^2 + x^2} \end{array}\right.$$

On reprend les points $a_{k,n}$ définis dans la sous-partie III.B :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad a_k = \frac{2k+1}{2n}.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ le polynôme interpolateur de $f_\alpha$ aux $2n$ réels $\{\pm a_{k,n} \in I \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Autrement dit $R_n$ est l'unique polynôme de degré au plus $2n-1$ qu coïncide avec $f_\alpha$ aux points

$$-\frac{2n-1}{2n}, -\frac{2n-3}{2n}, \ldots, -\frac{3}{2n}, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \ldots \frac{2n-3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}.$$

On pose $Q_n(X) = 1 - (X^2 + \alpha^2)R_n(X)$.

**Q37.** Montrer que $R_n$ est un polynôme pair et déterminer $Q_n(\alpha\mathrm{i})$.

**Q38.** Montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-1,1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2).$$

**Q39.** En déduire que, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}.$$

**Q40.** On suppose que $\alpha < \gamma$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty.$$