PC Lakanal
DM4 soft - problème I

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

Notations et définitions

— $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
— $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
— $\mathbf{R}[X]$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
— Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équations lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carré.

On admet le résultat suivant (théorème de Cauchy) : soient u, v, w trois fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$. Soit t_0 un point de I, et α, β deux réels. Alors, il existe une une fonction y solution sur I du problème de Cauchy

$$\forall t \in I, y''(t_0) + u(t)y'(t) + w(t)y(t) = w(t)$$
$$y(t_0) = \alpha, y'(t_0) = \beta$$

Partie I - Endomorphismes

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall\ P \in \mathbf{R}[X]\ ,\ \Delta(P) = XP'.$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbf{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par Δ.

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall\ P \in \mathbf{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall\ P \in \mathbf{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

Q10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0; n]\!]$.

Q11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0; n]\!]$.

Q12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{2}$$

où a et b sont des constantes réelles.

Q13. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

Q14. Montrer que si y est une solution de (2) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{3}$$

Q15. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.

Q16. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

Q17. Montrer que si y est solution de (2) sur J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

Q18. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

Q19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4)**.**

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

Q20. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} & = & 0 \\ c_{2k} & = & \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}. \end{cases}$$

Q21. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

Q22. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

Q23. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 & = & 1 \\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0. \end{cases} \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q24. Montrer qu'il existe un réel $M >$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$: $|\alpha_k| \leqslant \dfrac{M}{r^k}$.

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y \colon x \longmapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \colon \longmapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \longmapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.