Exercice 1

Etude en $\frac{9}{10}$ de la série :

$$\sum_n \frac{2^n}{n^2 - 1} x^{2n}.$$

Corrigé

Posons $\sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{n^2 - 1} x^{2n} = \sum_{n \geq 2} u_n$. pour x non nul, u_n ne s'annule pas, et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 2 \frac{(n+1)^2 - 1}{n^2 - 1} x^2$ admet pour limite $2x^2$.

D'après la règle de d'Alembert, $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge lorsque $2x^2 < 1$, soit $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et diverge quand $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Alors, $\sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{n^2 - 1} x^{2n}$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Comme $\frac{9}{10} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{n^2 - 1} x^{2n}$ diverge pour $x = \frac{9}{10}$.

S'il restait du temps pour cela, il était naturel que l'examinateur demande de calculer la somme de la série entière étudiée, allons – y.

Pour tout x tel que $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2 - 1} x^{2n} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x^2)^n}{n^2 - 1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{(2x^2)^n}{n - 1} + \frac{1}{2} \frac{(2x^2)^n}{n + 1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x^2)^n}{n - 1} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x^2)^n}{n + 1} \ :
\end{aligned}$$

le découpage est autorisé, car, à nouveau d'après la règle de d'Alembert, les deux nouvelles séries entières ont encore pour rayon de convergence $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour $x = 0$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2 - 1} x^{2n}$ vaut évidemment 0. Pour x non nul, en changeant d'indices, en arrangeant un peu, puis en utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 - x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2-1} x^{2n} &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{4x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^{n+1}}{n+1} \\
&= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^n}{n} + \frac{1}{4x^2} \left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^n}{n} \right) \\
&= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^n}{n} + \frac{1}{4x^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^n}{n} - 2x^2 - 4x^4 \right) \\
&= \frac{4x^4+1}{4x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^n}{n} - \frac{1}{2} - x^2 \\
&= \boxed{-\frac{4x^4+1}{4x^2} \ln\left(1+2x^2\right) - \frac{1}{2} - x^2}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Etude de la série

$$\sum_n \cosh(n) \,.\, x^n$$

Corrigé

La série entière $\sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^n \,.\, x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\mathrm{e}}$, et pour tout $x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right[$,

$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n \,.\, x^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}\,x}$. De même, $\sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^{-n} \,.\, x^n$ a pour rayon de convergence e, et pour tout $x \in \left]-\mathrm{e}, \mathrm{e}\right[$,

$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} \,.\, x^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1} x}$.

On sait que lorsque $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont de séries entières de rayons de convergences différents R et R', le rayon de convergence de $\sum \left(a_n + b_n\right) x^n$ est égal à $\min\left(R, R'\right)$. Ici, le rayon de convergence de

$\sum_n \cosh(n) \,.\, x^n = \frac{1}{2} \sum_n \left(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}\right) . \, x^n$ est donc égal à $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Pour tout $x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \cosh n \,.\, x^n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^n \,.\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} \,.\, x^n \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}\,x} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1} x} \right) \\
&= \boxed{\frac{1 - x\cosh 1}{1 - 2x\cosh 1 + x^2}}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a. Rayon de convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b. Développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.

Corrigé

a. On sait que la suite (a_n) converge, et que $\lim a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = e$. Donc :

- La suite (a_n) est bornée, ce qui entraîne que pour x tel que $|x| < 1$, $\sum a_n x^n$ converge. Ceci revient à dire que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

•• La suite $\sum a_n$ diverge grossièrement ; le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est alors inférieur ou égal à 1.

Par suite, $\boxed{\sum a_n x^n \text{ a un rayon de convergence égal à } 1}$.

••• Notons (b_n) la suite de terme général $b_n = \dfrac{1}{n!}$, et (c_n) la suite constante égale à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$, la série entière $\sum a_n x^n$ est donc le produit de Cauchy des séries entières $\sum b_n x^n = \sum \dfrac{x^n}{n!}$ et $\sum c_n x^n = \sum x^n$.

On a alors pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right),$$

d'où $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{e^x}{1-x}}$.

b. On pourrait raisonner à nouveau en termes de produits de Cauchy, mais il y a plus simple. En notant f la fonction somme de la série entière $\sum a_n x^n$, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, puis

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1-x} + \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$, d'où $\dfrac{e^x}{(1-x)^2} = f'(x) - f(x)$.

$x \mapsto \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$ est alors développable en série entière sur $]-1,1[$ comme somme de deux fonctions l'étant, et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{e^x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

soit :

$$\frac{e^x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^n$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left[n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{n!}\right] x^n} .$$

Exercice 4

Equivalent et limite de

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}.$$

Corrigé

Comme quoi il est bon de connaître (comme le programme l'exige) la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} .$$

Celle – ci donne :

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$$

$$\sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n}(2n-1)\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2} ,$$

et en simplifiant :

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{(2n-1)\,2\pi n} ,$$

d'où finalement $\boxed{\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} \sim \frac{1}{(2n-1)\sqrt{\pi n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{\frac{3}{2}}}}$. On en déduit immédiatement

que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} = 0}$.

Remarque

Un coefficient de la forme $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$ peut (doit ?) faire penser à un développement en série entière usuel.

De fait, on vérifie que le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1-x}$ (de rayon de convergence 1) est :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n} x^n}{2^{2n}(2n-1)} .$$

Le fait que $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{\frac{3}{2}}}$ assure que $\sum \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$ converge. Or l'on sait que, lorsqu'une série entière converge en l'une des bornes de son intervalle de convergence, elle y est continue. On peut donc écrire que $\sqrt{1-1} = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}$, d'où l'égalité $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n} x^n}{2^{2n}(2n-1)} = 1}$.

Exercice 5

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = u_1 = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1} .$$

a. Montrer que pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{n+3}{n+1}$.

b. Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)$ est décroissante.

c. En déduire le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.

On note f sa somme.

d. Déterminer une équation différentielle satisfaite par f, et calculer f.

Corrigé

a. Il est immédiat que la suite (u_n) est bien définie, et à valeurs positives.

La relation :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n+1} u_{n-1}$$

assure que (u_n) est croissante à partir du rang 1 (comme $u_1 = u_0$, elle est en fait croissante à partir du rang 0).

On a $\dfrac{u_1}{u_0} = 1 \leq \dfrac{3}{1}$, et pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_n + \frac{2}{n+1} u_n = \frac{n+3}{n+1} u_n} .$$

b. D'après le résultat précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{\left(\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}{\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)} \leq \dfrac{\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\dfrac{n+3}{n+1}\right)}{n^2}$,

soit :

$$\frac{\left(\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}{\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)} \leq \frac{n^2(n+3)}{(n+1)^3}.$$

On a $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \geq n^3 + 3n^2 = n^2(n+3)$, d'où $\dfrac{\left(\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}{\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)} \leq 1$.

Comme $\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)$ est à valeurs positives, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)_{n \geq 1} \text{ est décroissante}}$.

c. La suite (u_n) étant strictement positive et croissante, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est inférieur ou égal à 1.

Le fait que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ soit décroissante assure que $u_n = O\left(n^2\right) = O\left(n(n-1)\right)$. Le rayon de convergence est donc supérieur ou égal à celui de la série géométrique dérivée seconde $\sum n(n-1)x^n$, qui vaut 1.

Finalement, $\boxed{\text{le rayon de convergnce de } \sum u_n x^n \text{ est égal à } 1}$.

d. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)u_{n+1} = nu_n + u_n + 2u_{n-1}$, et l'on sait que la série entière $\sum nu_n x^n$ a même rayon de convergence que $\sum u_n x^n$.

On peut donc écrire que pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}x^n,$$

soit : $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n - 1\right) = x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n x^{n-1} + \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - 1\right) + 2x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}x^{n-1}$.

On en déduit que $f'(x) - 1 = xf'(x) + f(x) - 1 + 2xf(x)$,, la fonction f est donc solution sur $\left]-1, 1\right[$ de l'équation différentielle : $\boxed{(1-x)y'(x) = (1+2x)y(x)}$.

Les solutions de cette équation différentielle (linéaire d'ordre 1, homogène) sur $]-1,1[$ sont les fonctions

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda \exp\left(\int^x \frac{1+2t}{1-t}\,\mathrm{d}t\right) = \lambda \exp\left(\int^x \left(\frac{-2+2t}{1-t} + \frac{3}{1-t}\right)\mathrm{d}t\right)$$

$$= \lambda \exp\left(-2x - 3\ln\left(1-t\right)\right) = \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1-x\right)^3},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

En particulier, f est de cette forme, et, comme $f\left(0\right) = 1$, c'est la fonction $\boxed{f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1-x\right)^3}}$.

Exercice 6

a. Convergence de la série de terme général :

$$a_n = \ln\left(\frac{\left(-1\right)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$$

b. Rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

Corrigé

a. On a

$$a_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}\left(1 + \frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + b_n,$$

où $b_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

La série $\sum b_n$ converge absolument par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$; $\sum \frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées, et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Par conséquent, $\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ diverge}}$.

b. La divergence de $\sum a_n$ assure que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est inférieur ou égal à 1. De plus, la suite $\left(a_n\right)$ converge vers 0, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est aussi supérieur ou égal à 1. Ainsi, $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ vaut } 1}$.

Exercice 7

Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-nt^2}\, dt .$$

a. Existence de I_n. Limite lorsque n tend vers $+\infty$.

On suppose désormais que $f(0) \neq 0$.

b. Déterminer la nature de la série de terme général I_n (*on posera* $u = \sqrt{n}\, t$).

c. Soit g la fonction somme de la série entière de coefficients I_n. Montrer que $g(-1)$ existe, et que :

$$g(-1) = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\, e^{-t^2}}{1 + e^{-t^2}}\, dt .$$

d. Donner le domaine de définition de g.

e. On ne suppose plus que $f(0) \neq 0$. Trouver f bornée telle que $g(1)$ existe.

Corrigé

a. La fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale n'est donc généralisée qu'en $+\infty$.

La fonction f étant par hypothèse bornée, notons M un réel tel que pour tout $t \geq 0$, $|f(t)| \leq M$.

Alors pour tout $t \geq 0$, $\left| f(t)\, e^{-nt^2} \right| \leq M\, e^{-nt^2}$. Comme $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt$ converge, on en déduit, par majoration, que $\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-nt^2}\, dt \text{ converge}}$, et plus précisément que $t \mapsto f(t)\, e^{-nt^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b. les fonctions $f_n : t \mapsto f(t)\, e^{-nt^2}$ sont continues par morceaux, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(t)| \leq M\, e^{-t^2}$, et la fonction $t \mapsto M\, e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: l'hypothèse de domination est donc vérifiée. D'après le théorème d'interversion limite / intégrale, on a alors $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

Remarque

On pouvait se passer du théorème de convergence dominée, en écrivant plus simplement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|I_n| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-nt^2}\, dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt = M \sqrt{\frac{\pi}{n}} .$$

La fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; $\varphi : u \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ est de classe C^1, et bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Le changement de variable proposé est donc correct (*encore heureux*) :

$u \mapsto f_n(\varphi(u))|\varphi'(u)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et $\int_{\mathbb{R}_+} f_n(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

En explicitant ceci, on obtient $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Appliquons alors le théorème d'interversion limite / intégrale à la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)_{n \geq 1}$: la suite de fonctions continues par morceaux $\left(u \mapsto f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{e}^{-u^2}\right)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $u \mapsto f(0)\,\mathrm{e}^{-u^2}$, continue par morceaux. Cette suite est encore dominée par la fonction $t \mapsto M\,\mathrm{e}^{-t^2}$, qui n'a pas perdu son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ depuis le début de cette question . Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = f(0) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = f(0)\sqrt{\pi}\,.$$

Comme $f(0) \neq 0$, on en déduit que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{f(0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

$\sum \dfrac{f(0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ diverge et son terme général est de signe constant, on en déduit que $\boxed{\sum I_n \text{ diverge}}$.

c. Il s'agit de prouver que $\sum (-1)^n I_n$ converge, et que sa somme vaut $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}}{1+\mathrm{e}^{-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Dire que $\sum (-1)^n I_n$ converge parce que son terme général est équivalent à celui de la série alternée $\sum (-1)^n \dfrac{f(0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ peut éventuellement être tentant, mais attention, cet argument est faux : la règle des équivalents ne s'applique qu'à des séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang ; de toute façon, ça ne donnerait pas la valeur de la somme, oublions donc cette idée, et penchons – nous une troisième fois sur le théorème de convergence dominée, version série de fonctions cette fois :

- • La série de fonctions $t \mapsto \sum f(t)(-1)^n \mathrm{e}^{-nt^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, et

  $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(t)(-1)^n \mathrm{e}^{-nt^2} = -\frac{f(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}}{1+\mathrm{e}^{-t^2}}$ (pour t fixé, la somme est géométrique…).

- •• La fonction somme $t \mapsto -\dfrac{f(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}}{1+\mathrm{e}^{-t^2}}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- ••• ***Il est hors de question de prouver que*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left| f(t)(-1)^n \mathrm{e}^{-nt^2} \right| \mathrm{d}t$ ***converge, puisque l'on a montré en b. que tel n'est pas le cas ; on doit donc utiliser ce que l'on a appelé en cours la version 1 du théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions :***

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\sum f(t)(-1)^n \mathrm{e}^{-nt^2}$ est une série alternée, on sait alors que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{n=1}^{N} f(t)(-1)^n \mathrm{e}^{-nt^2}\right| \leq \left|f(t)(-1)^1 \mathrm{e}^{-t^2}\right|$, d'où

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f(t)(-1)^n \mathrm{e}^{-nt^2}\right| \leq M \mathrm{e}^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto M \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable, et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$\left|\sum_{n=1}^{N} f(t)(-1)^n \mathrm{e}^{-nt^2}\right| \leq M \mathrm{e}^{-t^2}$: on tient notre hypothèse de domination, et alors on peut conclure :

$\sum (-1)^n I_n$ converge, et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\mathrm{e}^{-t^2}}{1+\mathrm{e}^{-t^2}}\,\mathrm{d}t}$.

d. Pour simplifier un peu, je confonds la série entière et sa somme g (ce qui n'est pas bien correct) : par abus de langage, on parlera donc du rayon de convergence de g.

D'après **b.**, g n'est pas définie en 1, son rayon de convergence est donc inférieur ou égal à 1 ;

d'après **c.**, g est définie en -1, et le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1. Bon, ben alors on a tout ce qu'il faut : $\boxed{\text{le rayon de convergence de } g \text{ est } 1, \text{ et son domaine de convergence est } [-1,1[}$.

e. On peut toujours dire que choisir f identiquement nulle a des chances de convenir… certes ça ne risque pas de rapporter beaucoup de points, mais cet exercice est bien long et technique.

Enfin, pour donner une réponse (un peu) plus constructive, choisissons $f : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 1 \\ 1 \text{ si } t > 1 \end{cases}$.

Alors pour tout n, $I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n(u+1)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nu^2-2n}\,\mathrm{d}t$, d'où

$$0 \leq I_n \leq \mathrm{e}^{-n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nu^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-n}.$$

$\boxed{\text{La série } \sum I_n \text{ converge, ce qui revient à dire que } g(1) \text{ existe}}$.

Exercice 8

On pose :

$$f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}.$$

a. Prouver l'intégrabilité de f^n sur $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On note a_n son intégrale sur $\mathbb{R}$.

b. En minorant a_n, prouver la divergence de $\sum a_n$.

c. Trouver un axe de symétrie au graphe de f. Exprimer a_n à l'aide de :

$$w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\left(1 + u^2\right)^n}.$$

d. Relier w_{n+1} et w_n. En déduire le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Corrigé

a. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t + t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, qui ne s'annule pas. Alors f (et donc f^n, $n \in \mathbb{N}^*$) est définie est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f^n(t)\,\mathrm{d}t$ n'est généralisée qu'en $-\infty$ et $+\infty$.

Or $f^n(t) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$.

Par suite, $\boxed{f^n \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

b. On a

$$\begin{aligned} a_n &\geq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{\left(1 + t + t^2\right)^n} \geq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{\left(1 + 2t + t^2\right)^n} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{dt}}{\left(1 + t\right)^{2n}} = \lim_{X \to +\infty} \left[-\frac{1}{2n-1}\right]_0^X = \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

(la convergence de l'intégrale minorante est assurée par la minoration point par point, et par la positivité de tout le monde).

La série $\sum \frac{1}{2n-1}$ diverge et elle est à termes positifs, donc $\boxed{\sum a_n \text{ diverge}}$.

c. • On a déjà dit que $1 + t + t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, on a donc $f(t) = \dfrac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$.

Alors pour tout t, $f\left(t - \frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} = f\left(\frac{1}{2} - t\right)$.

Ceci prouve que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f.

•• Il est alors naturel de poser, dans l'intégrale

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)^n},$$

$u = \dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$. Certes ce changement de variable est effectué dans une intégrale généralisée, mais il est affine, justifier est a priori superflu (se préparer tout de même au cas d'un examinateur porté à la chipote).

On fait donc ce changement de variable, et l'on obtient $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+1\right)^n}$, puis, par parité de la nouvelle fonction intégrée : $\boxed{a_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \sqrt{3} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+1\right)^n} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \sqrt{3}\, w_n}$.

d. • On intègre par parties par exemple dans $I_{n,A} = \displaystyle\int_0^A \dfrac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+1\right)^n}$, $A > 0$. Les fonctions $u \mapsto u$, $u \mapsto \dfrac{1}{\left(u^2+1\right)^n}$ sont de classe C^1, et ont pour dérivées respectives $u \mapsto 1$ et $u \mapsto -2n \dfrac{u}{\left(u^2+1\right)^{n+1}}$.

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_{n,A} &= \left[\frac{u}{\left(u^2+1\right)^n}\right]_0^A + 2n \int_0^A \frac{u^2}{\left(u^2+1\right)^{n+1}} \mathrm{d}u \\ &= \frac{A}{\left(A^2+1\right)^n} + 2n \int_0^A \frac{u^2+1}{\left(u^2+1\right)^{n+1}} \mathrm{d}u - 2n \int_0^A \frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+1\right)^{n+1}}, \end{aligned}$$

d'où $\left(2n-1\right) I_{n,A} = 2n\, I_{n+1,A} - \dfrac{A}{\left(A^2+1\right)^n}$. En faisant tendre A vers $+\infty$, on en déduit

$$\boxed{\left(2n-1\right) w_n = 2n\, w_{n+1}}.$$

Remarque 1

Cette relation est proche de celle que vérifient les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$; ce n'est pas un hasard, et les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+1\right)^n}$ ont sans doute été notées w_n en référence à ceci.

Si l'on pose $u = \tan t$ dans w_n, on obtient en effet $w_n = W_{2n-2}$.

•• Passons maintenant au rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

La suite $\left(a_n\right)$ ne s'annule pas, et, d'après les résultats précédents, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\sqrt{3}}\,\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2n-1}{2n}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{3}$, et que $\boxed{\sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } \frac{3}{4}}$.

Remarque 2

Pour $x \in \left]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right[$, on a après avoir justifié l'interversion somme / intégrale,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{1+t+t^2}\right)^n\right)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+t+t^2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{1+t+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{t^2+t+1-x}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-x\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{\substack{X\to+\infty\\ Y\to-\infty}}\left[\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}-x}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}-x}}\right)\mathrm{d}t\right]_{-\infty}^{+\infty},$$

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\pi x}{\sqrt{\frac{3}{4}-x}} = \frac{2\pi x}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{3}x}}}$.

En utilisant ceci et le développement en série entière de $\frac{\pi x}{\sqrt{\frac{3}{4}-x}}$, on en déduit une expression explicite des a_n :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* : a_n = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3^n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

On peut d'ailleurs retrouver cela en utilisant les relations $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n\sqrt{3}\,w_n$ et $(2n-1)\,w_n = 2n\,w_{n+1}$.

Exercice 9

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et par la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{n+1} \text{ pour } n \geq 0.$$

a. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Existence et valeur de la somme de terme général $u_n x^n$.

Corrigé

a. et **b.**, solution 1

On remarque que pour tout $n \geq 0$,

$$(n+1)u_{n+2} - u_{n+1} = n u_{n+1} - u_n,$$

la suite $\left(n u_{n+1} - u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante. Comme $0 . u_1 - u_0 = 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n u_{n+1} = u_n$, et, puisque $u_1 = 1$, on en tire facilement :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Il en résulte immédiatement que la suite (u_n) converge vers 0, que la série entière $\sum u_n x^n$ est de rayon de convergence infini, et, en notant f sa fonction somme, on a pour tout x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \boxed{x \mathrm{e}^x}.$$

a. et **b.**, solution 2.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Supposons la série entière $\sum u_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$; notons $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ sa fonction somme. Alors on a pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1} x^{n+1} :$$

$\sum u_{n+2} x^{n+1}$, $\sum u_{n+1} x^{n+1}$ convergent parce que $\sum u_n x^n$, et l'on sait que $\sum \frac{u_n}{n+1} x^{n+1}$ a même rayon de convergence, ceci est donc bien licite.

Pour x non nul dans $\left]-R, R\right[$, on a donc

$$\frac{1}{x}\left(f(x) - u_0 - u_1 x\right) = f(x) - u_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1} x^{n+1},$$

soit, puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$,

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right) f(x) - 1 = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1} x^{n+1}.$$

En dérivant cette expression (dériver terme à terme une série entière dans son intervalle ouvert de convergence est autorisé), il vient

$$\frac{1-x}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n,$$

d'où :

$$x(1-x) f'(x) + \left(x^2 - 1\right) f(x) = 0.$$

Notons $\alpha = \min(1, R)$ et $I =]0, \alpha[$; f est solution sur I de l'équation différentielle (linéaire du premier ordre, homogène) :

$$(E) : \quad x(1-x)y' + \left(x^2 - 1\right)y = 0.$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda\, x\, e^x$, f est l'une d'entre elles. On a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc $\lim\limits_0 f = 0$ et $\lim\limits_0 f' = 1$. Par suite, f est la fonction $f : x \mapsto x\, e^x$, au moins sur I.

Réciproquement, $f : x \mapsto x\, e^x$ est développable en série entière de rayon de convergence infini, avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\, x^n,$$

où l'on a posé $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$.

On a $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, et il n'est pas difficile de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} - \dfrac{v_n}{n+1}$: les suites (u_n) et (v_n) sont donc égales.

On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$, que la série entière $\sum u_n\, x^n$ est de rayon de convergence infini, et de somme $x \mapsto x\, e^x$.

Exercice 10

On pose pour tout n entier

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

a. Domaine de convergence de la série entière de terme général $a_n\, x^n$.

b. Calculer sa somme.

c. Développer en série entière la fonction

$$x \mapsto \frac{e^x}{(1-x)^2}.$$

Corrigé

a. On sait que la suite (a_n) converge, et que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = e$. Alors :

- La suite (a_n) ne tend pas vers 0, donc $\sum a_n$ diverge ; ceci implique que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n\, x^n$ est inférieur ou égal à 1.
- • La suite (a_n) est bornée, d'où $R \geq 1$.

Par conséquent, $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum a_n\, x^n \text{ est égal à } 1}$.

b. Notons f la fonction somme de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$.

Soient (b_n) la suite de terme général $b_n = \dfrac{1}{n!}$, et (c_n) la suite constante égale à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$, la série entière $\sum a_n x^n$ est donc le produit de Cauchy des séries entières $\sum b_n x^n = \sum \dfrac{x^n}{n!}$ et $\sum c_n x^n = \sum x^n$.

On a alors pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right),$$

d'où $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{e^x}{1-x}}$.

c. On pourrait raisonner à nouveau en termes de produits de Cauchy, mais il y a plus simple. En notant f la fonction somme de la série entière $\sum a_n x^n$, on a pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, puis

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1-x} + \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$, d'où $\dfrac{e^x}{(1-x)^2} = f'(x) - f(x)$.

$x \mapsto \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$ est alors développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$ comme somme de deux fonctions l'étant, et pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$:

$$\frac{e^x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

soit :

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^n \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left[n\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) + \frac{1}{n!}\right] x^n}.\end{aligned}$$

Exercice 11

Soit λ un réel non nul et soit un couple de réels $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta, \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda u_n.$$

1. On suppose que (u_n) converge.

a. Quelle est sa limite ?

b. Montrer que la série de terme général u_n converge. Calculer sa somme.

2. On suppose que λ appartient à $\left]-\frac{1}{4}, 0\right[$.

a. Montrer que $X^2 - X - \lambda$ admet deux racines réelles dans $]0, 1[$.

b. Montrer que (u_n) converge.

3. Que se passe – t – il lorsque $\lambda \in \left]-1, -\frac{1}{4}\right[$?

4. Montrer que, lorsque $\lambda \geq 2$, la suite (u_n) diverge.

5. A partir du cas $\lambda = -\frac{1}{4}$, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Corrigé

1.a. La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Le polynôme caractéristique associé est

$P = X^2 - X - \lambda$, et :

- Si $\lambda > -\frac{1}{4}$, P admet deux racines distinctes $r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}$. Alors, il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a\, r_1^n + b\, r_2^n$.

  Si $\lambda > 2$, $1 < |r_2| < |r_1|$, et alors (u_n) ne converge que si $a = b = 0$, ce qui est interdit par l'énoncé (hypothèse $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$). Si $\lambda = 2$, $u_n = a\, 2^n + b(-1)^n$ et l'on a le même problème.

  On a $|r_2| < 1$, donc $\lim b\, r_2^n = 0$. Ensuite :

  Si $\lambda > 0$, $\lim r_1^n = +\infty$; la convergence de (u_n) entraîne alors que nécessairement $a = 0$, et ainsi $\forall\ n$, $u_n = b\, r_2^n$, d'où $\lim u_n = 0$.

  Si $\lambda \in \left]-\frac{1}{4}, 0\right[$, $|r_2| < 1$, et $\lim u_n = 0$.

  Le cas $\lambda = 0$ est exclu par l'énoncé

- • Si $\lambda = -\frac{1}{4}$, il existe a et b réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a + b\,n}{2^n}$, et, par croissances comparées, $\lim u_n = 0$.

- • • Enfin, si $\lambda < -\frac{1}{4}$, P possède deux racines complexes non réelles conjuguées, $\gamma = \sqrt{-\lambda}\ \mathrm{e}^{i\theta}$

et $\overline{\gamma} = \sqrt{-\lambda}\ e^{-i\theta}$, avec $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, et il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = \sqrt{-\lambda}^{\,n}\left(a \cos n\theta + b \sin n\theta\right)$. Dans ces conditions, la convergence de (u_n) implique, que,

soit $|\lambda| < 1$, soit $a = b = 0$, mais cela l'énoncé l'interdit (hypothèse $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$). Donc,

$|\lambda| < 1$ et la limite de (u_n) est nulle.

Finalement, $\boxed{\lim(u_n) = 0}$.

1.b. On a de plus montré que dans tous les cas, (u_n) est combinaison linéaire de séries géométriques ou géométriques dérivées, de raisons respectives strictement inférieures à 1 en valeur absolue. Donc, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Notons S sa somme. En sommant les égalités $u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda u_n$, $n \geq 0$, on obtient

$S - u_1 - u_0 = S - u_0 + \lambda S$, d'où l'on déduit que $\boxed{S = -\frac{u_1}{\lambda} = -\frac{\beta}{\lambda}}$.

2. 3. 4. Bon ben ça c'est fait…

5. Ici $u_0 = \alpha = 0$, $u_1 = \beta = \frac{1}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{4}$, d'où $\boxed{S = -\frac{\beta}{\lambda} = 2}$, ce que notre connaissance des séries géométriques dérivées permettrait de retrouver.

Exercice 12

Soit pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_1^e \ln^n(x)\,dx$

a. Montrer que la suite (I_n) converge. Quelle est sa limite ?

b. Nature des séries $\sum I_n^\alpha$ et $\sum (-1)^n I_n$.

c. Rayon de convergence et somme de $\sum I_n x^n$.

Corrigé

a. ***Convergence***

La suite $(I_n) = \left(\int_1^e \ln^n(x)\,dx\right)$ est à valeurs positives, et elle est facilement décroissante (pour tout

$x \in [1, e]$, $0 \leq \ln(x) \leq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_1^e \ln^{n+1}(x)\,dx \leq \int_1^e \ln^n(x)\,dx$).

Par conséquent, la suite $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \ln^n(x)$ est continue par morceaux, intégrable sur $[0, \mathrm{e}[$, et la suite de fonctions $\left(f_n\right)$ converge simplement sur $[0, \mathrm{e}[$ vers la fonction nulle, qui est évidemment continue par morceaux. De plus, pour

tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, \mathrm{e}[$, $\left|f_n(t)\right| \leq 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, \mathrm{e}[$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

b. D'après ce qui précède, la suite $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0. En vertu du critère spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum (-1)^n I_n \text{ est donc convergente}}$.

En intégrant par parties $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} 1 . \ln^n(x)\, \mathrm{d}x$, on obtient pour tout $n \geq 1$, $I_n = \mathrm{e} - n I_{n-1}$.

Par décroissance de $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit $I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$ et $I_{n-1} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$, d'où pour tout $n \geq 1$,

$\dfrac{\mathrm{e}}{n+2} \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$. Il en résulte que $I_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}$, ce qui assure que $\boxed{\text{la série } \sum I_n \text{ diverge}}$.

c. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$. On a $R \leq 1$ car $\sum I_n$ diverge, et, comme $\sum (-1)^n I_n$ converge, $R \geq 1$, d'où $\boxed{R = 1}$.

Reste à calculer la somme S de cette série entière. On va en fait en donner une expression intégrale, mais on ne pourra pas obtenir quelque chose de plus explicite.

Essai 1, via une équation différentielle

Notons S la somme de la série entière $\sum I_n x^n$.

On a vu que pour tout $n \geq 1$, $I_n = \mathrm{e} - n I_{n-1}$. On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n = \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n I_{n-1} x^n$$

(toutes les séries mises en jeu convergent).

On a donc

$$\begin{aligned} S(x) - I_0 &= \frac{\mathrm{e}\, x}{1-x} - x \sum_{n=1}^{+\infty} I_{n-1} x^{n-1} - x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) I_{n-1} x^{n-2} \\ &= \frac{\mathrm{e}\, x}{1-x} - x\, S(x) - x^2 S'(x), \end{aligned}$$

d'où $x^2\, S'(x) + (1+x)\, S(x) = \dfrac{\mathrm{e}\, x}{1-x} + \mathrm{e} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}}{1-x} - 1$.

En résolvant cette l'équation différentielle, on trouve qu'il existe deux constantes telles que sur

$I = \left]-1, 0\right[$ ou $I = \left]0, 1\right[$, on ait $S(x) = \left[\displaystyle\int^{x} \left(\frac{\mathrm{e}}{1-t} - 1 \right) t\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\, \mathrm{d}t + \text{cste} \right] \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}$, ce qui est plutôt affreux.

Méthode 2, via une interversion somme/intégrale

Sans doute plus naturel…

Pour ne pas se mélanger les pinceaux, il est nécessaire de ne pas prendre x pour variable d'intégration, on note

donc $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^n(t)\, \mathrm{d}t$. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{\mathrm{e}} x^n \ln^n(t)\, \mathrm{d}t$; les fonctions $g_n : t \mapsto x^n \ln^n(t)$ sont

continues par morceaux sur $[1, \mathrm{e}]$, vérifient $\forall\ t \in [1, \mathrm{e}]$, $|f_n(t)| \leq |x|^n$, et la série géométrique $|x|^n$:

la série de fonctions $\sum g_n$ converge donc normalement sur $[1, \mathrm{e}]$. Intervertir somme et intégrale est alors

autorisé, et donne

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n = \int_1^{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ln t)^n\, \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1 - x \ln t}\, \mathrm{d}t}\ .$$

Remarque

On pourrait tenter de dériver sous le signe intégral, et de voir si on obtient quelque chose d'agréable. Inutile de déranger la formule de Leibniz pour cela :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, I_n x^n = \int_1^{\mathrm{e}} \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} (\ln t)^n\, \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{(1 - x \ln t)^2}\, \mathrm{d}t$$

s'obtient par des arguments analogues à ceux qui précèdent.

On peut toujours essayer d'arranger un peu, par exemple

$$\begin{aligned} x\, S'(x) &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x \ln t}{(1 - x \ln t)^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x \ln t - 1}{(1 - x \ln t)^2}\, \mathrm{d}t + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{(1 - x \ln t)^2}\, \mathrm{d}t \\ &= -S(x) + \ldots \text{ bof.} \end{aligned}$$

Exercice 13

On pose $v_0 = 0$ et pour $n \geq 0$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}\big(1 - (n+1)\, v_n\big)$.

a. Montrer que : $\forall\ x \geq 1,\ \frac{1}{3}\left(1 + x\right) \leq x$. En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|v_n\right| \leq n!$.

b. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{v_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

c. On pose pour tout $x \in \left]-1, 1\right[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n$. Prouver que :

$$\forall\ x \in \left]-1, 1\right[,\ \left(x + 3\right) f(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-3)^k}{k!}$. Exprimer v_n en fonction de w_n.

e. Trouver l'ensemble des séries $\sum u_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} + (n+1)u_n = 1$.

Corrigé

a. • Pour tout $x \geq 1,\ \frac{1}{3}\left(1 + x\right) \leq \frac{2}{3} x \leq x$.

•• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{H}(n) : \left|v_n\right| \leq n!$

Initialisation

$\left|v_0\right| = 0 \leq 1$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}(n)$.

Si $v_n \geq 0$, $\left|v_{n+1}\right| = \frac{1}{3}\left|\left(1 - (n+1)v_n\right)\right| \leq \frac{1}{3}\max\left(1, (n+1)v_n\right) \leq \frac{1}{3}\max\left(1, (n+1)!\right)$.

Si $v_n \in \left]-\frac{1}{n+1}, 0\right[$, $\left|v_{n+1}\right| = \frac{1}{3}\left(1 - (n+1)v_n\right) \leq \frac{2}{3}$.

Si $v_n \leq -\frac{1}{n+1}$, $-(n+1)v_n \geq 1$, donc, d'après l'inégalité $\forall\ x \geq 1,\ \frac{1}{3}\left(1 + x\right) \leq x$,

$\left|v_{n+1}\right| \leq -(n+1)v_n \leq (n+1)!$.

Dans les trois cas, on a bien $\mathcal{H}(n+1)$, on a donc établi par récurrence que : $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|v_n\right| \leq n!}$.

b. D'après ce qui précède, la suite $\left(\frac{v_n}{n!}\right)$ est bornée, donc $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum \frac{v_n}{n!} x^n}$ $\boxed{\text{est supérieur ou égal à } 1}$.

c. f est bien définie sur $\left]-1, 1\right[$, et pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$,

$$\begin{aligned}(x+3)f(x) &= (x+3)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n \\ &= (x+3)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n \qquad \text{car } v_0 = 0 \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{v_{n-1}}{(n-1)!}x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_{n-1}}{(n-1)!}x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n \qquad \text{car } v_0 = 0 \text{ à nouveau} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,v_{n-1}+3v_n}{n!}x^n .\end{aligned}$$

Or la relation $\forall\ n \geq 0,\ v_{n+1} = \frac{1}{3}\big(1-(n+1)v_n\big)$ donne $\forall\ n \geq 1,\ 3v_n + n\,v_{n-1} = 1$.

On en déduit que $(x+3)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$, et l'on a bien :

$$\boxed{\forall\ x \in\,]-1,1[\,,\ (x+3)f(x) = \mathrm{e}^x - 1}\ .$$

d. D'après **c.**, pour tout $x \in\,]-1,1[\,, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n = \frac{1}{3+x}\left(\mathrm{e}^x-1\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\left(\mathrm{e}^x-1\right)$.

$x \mapsto \frac{1}{1+\frac{x}{3}}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont développables en séries entières de rayons de convergence respectifs 3 et $+\infty$,

on peut donc écrire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-3)^{-k}x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Ainsi, la série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{v_n}{n!}x^n$ est produit de Cauchy de $\frac{1}{3}\sum_{k\geq 0}(-3)^{-k}x^k$ et de $\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k!}$.

On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{v_n}{n!} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(-3)^{-(n-k)}\text{, soit } v_n = -\frac{n!}{(-3)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-3)^k}{k!} = \boxed{-\frac{n!}{(-3)^{n+1}}w_n}\ .$$

Remarque

En tant que produit de Cauchy, on sait que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{v_n}{n!}x^n$ est supérieure ou égal

à $\min(3,+\infty) = 3$.

e. On manie ici les séries en tant qu'objets formels, c'est – à – dire sans se préoccuper de leur nature.

La série $\sum v_n$ vérifiant $\forall\ n \geq 0,\ 3v_{n+1} + (n+1)v_n = 1$, $\sum u_n$ est telle que

$\forall\ n \geq 0,\ 3u_{n+1} + (n+1)u_n = 1$ si et seulement la série $\sum a_n = \sum (u_n - v_0)$ vérifie

$$\forall\ n \geq 0,\ 3a_{n+1} + (n+1)a_n = 0 \qquad (1).$$

Comme $v_0 = 0$, a_0 est égal à u_0, et l'on déduit facilement de (1) que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{n!}{(-3)^n} u_0$$

Comme pour tout $\forall\, n \geq 0$, $u_{n+1} = v_n + a_n$, il résulte de ceci que les séries $\sum u_n$ solutions du problème sont les séries $\boxed{\sum \left(v_n + \alpha \frac{n!}{(-3)^n} \right),\ \alpha \in \mathbb{R}}$.

la seule d'entre elles qui soit convergente, ou aussi bien qui soit telle que $\sum u_n x^n$ ait un rayon de convergence non nul, est la série $\sum v_n$ elle – même.

Exercice 14

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$. On donne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n .$$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : (x^2 - 1)\, y''(x) + 3x\, y'(x) + y(x) = 0$$

a. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n(t)$. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. Soient $r > 0$ et $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r, r[$. Montrer que S est solution de (E) sur $]-r, r[$ si et seulement si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n .$$

c. Calculer le rayon de convergence de $\sum u_{2n} x^{2n}$, et montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n}$ est solution de (E) sur $]-1, 1[$.

d. Même question pour $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

Corrigé

a. On suppose $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La suite de fonctions $(f_n : t \mapsto \cos^n(t))$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction nulle ; les f_n sont évidemment intégrables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| \leq 1$. La fonction constante égale à 1 est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée,

et l'on obtient $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$, ce qui n'est pas très étonnant pour des intégrales de Wallis.

b. On a pour tout $x \in]-r, r[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

et $S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$, donc S est solution de (E)

sur $]-r, r[$ si et seulement si pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

soit si et seulement si pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

(les termes ajoutés sont nuls).

Après regroupement et par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, ceci est réalisé si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1) a_{n+2} = a_n \left[n(n-1) + 3n + 1 \right] = a_n (n+1)^2$.

Ainsi, $\boxed{S \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-r, r[\text{ si et seulement si pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n}$.

c. La suite (u_{2n}) ne s'annule pas, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{u_{2(n+1)}}{u_{2n}} \right| = \frac{2n+1}{2n+2}$.

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{2(n+1)}}{u_{2n}} \right| = 1$, et l'on en conclut grâce à la règle de d'Alembert que

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum u_{2n} x^{2n} \text{ est } R = \sqrt{\frac{1}{\lim \left| \frac{u_{2(n+1)}}{u_{2n}} \right|}} = 1}.$$

Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_{2n} = u_{2n}$ et $a_{2n+1} = 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$: pour n impair c'est évident, et, pour n pair, c'est assuré par la relation rappelée par

l'énoncé : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$

Donc d'après **b.**, $\boxed{f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n} \text{ est solution de de } (E) \text{ sur }]-1, 1[}$.

d. Alors, même réponse…

Remarque

(f, g) est un système fondamental de solutions de (E) sur $]-1,1[$.

Après justification de l'interversion somme / intégrale, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x^2 \cos^2 t}$

et $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos t \, \mathrm{d}t}{1 - x^2 \cos^2 t}$. Ces deux intégrales ne sont pas bien dures à calculer (poser $u = \tan t$ dans la première, $u = \sin t$ dans la deuxième). Après ce calcul, on trouve $f(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - x^2}}$ et

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$.

Les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\left(\lambda + \mu \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\right)$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 15

a. On note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \operatorname{Card}\left\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \,/\, i^2 + j^2 \leq n\right\}$. Déterminer un équivalent de a_n lorsque $n \to +\infty$.

b. Soit $G : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n^2}$. En considérant $G^2(t)$, déterminer un équivalent de G lorsque $t \to 1^-$.

<u>**Sol.**</u>

a. On considère le quart de disque dans $\mathbb{R}_+^2$ de centre O et de rayon $\sqrt{n}$, et il contient entièrement $a_n - 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ carrés disjoints d'aire égale à 1 (faire un dessin et compter les coins supérieurs droits) en rajoutant $2\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ carrés (en haut et à droite de chacun des carrés précédents), on obtient $a_n + 1$ carrés disjoints dont la réunion contient ce même quart de cercle.

D'où : $a_n - 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \leq \frac{\pi n}{4} \leq a_n + 1$, et donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi n}{4}$.

b. Pour t tel que $|t| < 1$, $t^{n^2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et pour $t > 1$, $t^{n^2} \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$. Donc la série entière définissant G a pour rayon de convergence $R = 1$. On note cette série $\left(\sum b_n x^n\right)_{n \geq 0}$ où $b_n = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Le théorème sur le produit de Cauchy des séries entières montre alors que pour tout $t \in]-1,1[$, $G^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$

où $c_n = \sum_{(k,\ell)\in \mathbb{N}^2, k+\ell=n} b_k b_\ell$. Or pour $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k+\ell \leq n$, $b_k b_\ell$ est égal à 1 si k et ℓ sont des carrés,

et à 0 sinon. On en déduit : $c_n = a_n$. On a donc : $G^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

On note $H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi n}{4} t^n = \frac{\pi}{4} \frac{t}{(1-t)^2}$ (calcul facile).

Soit $\varepsilon > 0$, comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi n}{4}$, il existe un rang N à partir duquel $\left| a_n - \frac{\pi n}{4} \right| \underset{n\to+\infty}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \frac{\pi n}{4}$.

On fixe un tel rang N, et on a alors pour tout $n \geq N$ et pour tout $t \in [0,1[$:

$$\left| G^2(t) - H(t) \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \left| a_n - \frac{\pi n}{4} \right| t^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{\pi n}{4} t^n \leq \sum_{n=0}^{N} \left| a_n - \frac{\pi n}{4} \right| t^n + \frac{\varepsilon}{2} H(t).$$

Comme $H(t) = \frac{\pi}{4} \frac{t}{(1-t)^2} \underset{t\to 1^-}{\to} +\infty$, et que $\sum_{n=0}^{N} \left| a_n - \frac{\pi n}{4} \right| t^n \underset{t\to 1^-}{\to} C$ où $C \in \mathbb{R}_+$ est une constante, on en

déduit que $\frac{\sum_{n=0}^{N} \left| a_n - \frac{\pi n}{4} \right| t^n}{H(t)} \underset{t\to 1^-}{\to} 0$, il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1[$,

$\frac{\sum_{n=0}^{N} \left| a_n - \frac{\pi n}{4} \right| t^n}{H(t)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et on a alors pour tout $t \in [1-\eta, 1[$: $\left| G^2(t) - H(t) \right| \leq \varepsilon H(t)$.

Ce qui montre $G^2(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} H(t) = \frac{\pi t}{4(1-t)^2} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{\pi}{4(1-t)^2}$.

On en déduit, puisqu'il est clair que G est positive sur $[0,1[$: $G(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-t)}$.

Exercice 16

a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum \frac{\sin(\alpha n)}{n} x^n \right)_{n\geq 1}$.

b. Calculer la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

<u>Sol.</u>

a. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \leq 1$, alors $\frac{\sin(\alpha n)}{n} x^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Si $|x| > 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\frac{\sin(\alpha n)}{n} x^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, alors $\sin(\alpha n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc

$\sin(\alpha(n+1)) = \sin(\alpha n)\cos(\alpha) + \cos(\alpha n)\sin(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, d'où on déduit (puisque $\sin(\alpha) \neq 0$) :

$\cos(\alpha n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, puis $\cos^2(\alpha n) + \sin^2(\alpha n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui est absurde puisque $\cos^2(\alpha n) + \sin^2(\alpha n) = 1$.

Donc $\dfrac{\sin(\alpha n)}{n} x^n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

De ce raisonnement on déduit que le rayon de convergence est : $R = 1$.

b. Notons f la somme de cette série entière sur $]-1,1[$.

On a alors pour tout $x \in]-1,1[$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\alpha) x^{n-1} = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{in\alpha}x^{n-1} - e^{-in\alpha}x^{n-1}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1-x e^{i\alpha}} - \frac{e^{-i\alpha}}{1-x e^{-i\alpha}}\right),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2i}\frac{\left(e^{i\alpha}-x\right)-\left(e^{-i\alpha}-x\right)}{\left(1-x e^{i\alpha}\right)\left(1-x e^{-i\alpha}\right)} = \frac{\sin(\alpha)}{x^2 - 2x\cos(\alpha)+1}.$$

Comme $f(0) = 0$ on en déduit : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(\alpha)}{\left(t-\cos(\alpha)\right)^2 + \sin^2(\alpha)}\,dt = \int_0^x \frac{\sin(\alpha)}{\left(t-\cos(\alpha)\right)^2 + \sin^2(\alpha)}\,dt$.

Le changement de variable $u = \dfrac{t-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ montre alors : $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}^{\frac{x-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} \frac{du}{u^2+1}$,

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right).$$

Exercice 17

a. Déterminer l'ensemble de définition D de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^2x}$.

b. f est-elle continue sur D ? f est-elle de classe C^∞ sur D ?

c. f est-elle développable en série entière en 0 ?

Sol.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. De : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|e^{-n+in^2x}\right| = e^{-n}$, et de la convergence de la série géométrique $\left(\sum e^{-n}\right)_{n\geq 0}$, on déduit la convergence absolue de la série numérique $\left(\sum e^{-n+in^2x}\right)_{n\geq 0}$: f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{-n+in^2x} \end{cases}$, et on a alors les résultats suivants :

(*i*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivées successives : $u_n^{(k)} : x \mapsto i^k n^{2k} e^{-n+in^2x}$.

(*ii*) La série de fonctions $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f.

(iii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\left|u_n^{(k)}(x)\right| = n^{2k} \mathrm{e}^{-n}$, et, comme

$n^{2k} \mathrm{e}^{-n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on en déduit que la série numérique $\left(\sum n^{2k} \mathrm{e}^{-n}\right)_{n \geq 0}$ converge. Ceci montre que la série de fonctions $\left(\sum u_n^{(k)}\right)_{n \geq 0}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

De ces résultats on déduit que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (et donc continue) de dérivées successives :

$$f^{(k)} : x \mapsto i^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} \mathrm{e}^{-n + i n^2 x}.$$

c. En particulier, $\dfrac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} \mathrm{e}^{-n} \geq \dfrac{k^{2k} \mathrm{e}^{-k}}{k!}$.

Or $\dfrac{k^{2k} \mathrm{e}^{-k}}{k!} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{k^{2k} \mathrm{e}^{-k}}{k^k \mathrm{e}^{-k} \sqrt{2\pi k}} = \dfrac{k^k}{\sqrt{2\pi k}}$, par conséquent pour tout $x > 0$: $\dfrac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} x^k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$, ce qui montre que la série de Taylor de f a un rayon de convergence nul, et donc que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 18

Soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

a. Calculer d_2 et d_3.

b. Montrer : $\forall n \geq 2$, $\dfrac{n!}{3} \leq d_n \leq n!$.

c. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\left(\sum \dfrac{d_n}{n!} x^n\right)_{n \geq 0}$.

d. On note S la somme de cette série entière sur $]-R, R[$. Montrer que S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle : $(1 - x)y' - xy = 0$.

e. En déduire une expression de S à l'aide des fonctions usuelles.

f. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de d_n en fonction de n.

g. On admet que d_n est le cardinal de l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.

Montrer par un argument de dénombrement que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

Solution

a) $d_2 = 1.(0 + 1) = 1$, et $d_3 = 2.(1 + 0) = 2$.

b. Montrons cette relation par récurrence sur n. De $\dfrac{2}{3} \leq 1 \leq 2$ et $\dfrac{3}{3} \leq 2 \leq 3$ on déduit qu'elle est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$.

Soit $n \geq 3$, si elle est vraie pour n et $n - 1$ on a alors : $\dfrac{n(n! + (n-1)!)}{3} \leq n(d_n + d_{n-1}) \leq n(n! + (n-1)!)$.

Or $n\left(n! + (n-1)!\right) = n(n-1)!(1+n) = (n+1)!$, d'où : $\dfrac{(n+1)!}{3} \leq d_{n+1} \leq (n+1)!$.

La récurrence est établie.

c. On sait que le rayon de convergence de la série $\left(\sum x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est égal à 1, il en est donc de même pour celui de la série $\left(\sum \dfrac{x^n}{3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. De $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{d_n}{n!} \leq 1$, on déduit alors que $R \geq 1$ et de $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{d_n}{n!}$, on déduit de même que $1 \geq R$, d'où $R = 1$.

d. On calcule pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, d'après les théorèmes généraux sur les séries entières :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n, \; x S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, d_{n-1}}{n!} x^n,$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{d_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{d_{n+1}}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n$$ (puisque $d_1 = 0$),

$$x S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, d_n}{n!} x^n,$$

D'où $S'(x) - x S'(x) - x S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n+1} - n\, d_n - n\, d_{n-1}}{n!} x^n = 0$.

e) Sur $\left]-1,1\right[$ cette équation différentielle est équivalente à $y' = \dfrac{x}{1-x} y$. Or on calcule sur $\left]-1,1\right[$:

$\displaystyle\int \frac{x}{1-x} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \mathrm{d}x = -\ln(1-x) - x + cste$. La solution générale de cette équation différentielle est donc $y = C \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$. De $S(0) = \dfrac{d_0}{0!} = 1$, on déduit $C = 1$, d'où $S(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.

f. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ et pour tout $x \in \left]-1,1\right[$: $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. D'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries numériques on en déduit : pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}.$$

De l'unicité du développement en série entière de la fonction S sur $\left]-1,1\right[$ on déduit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{d_n}{n!} = c_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p\, n!}{p!}$.

g. On note $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des permutations de $1, n$. On sait que $\mathrm{Card}(\mathbb{S}_n) = n!$.

On note, pour $k \in 0, n$, $\mathbb{S}_n(k)$ l'ensemble des permutations de $1, n$ ayant exactement k points fixes, de sorte que $n! = \mathrm{Card}(\mathbb{S}_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathbb{S}_n(k))$. Pour dénombrer $\mathbb{S}_n(k)$, on localise d'abord les k points fixes : il y a $\dbinom{n}{k}$

possibilités de choix pour ces points fixes. Pour chacun de ces $\binom{n}{k}$ choix, il y a clairement d_{n-k} permutations de $[\![1, n]\!]$ laissant fixe ces k entiers, et dérangeant les $n-k$ entiers restant. On en déduit : $\operatorname{Card}\left(\mathbb{S}_n(k)\right) = \binom{n}{k} d_{n-k}$. On obtient bien la relation demandée : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

Exercice 19

a. Rayon de convergence de la série entière $\left(\sum n^{(-1)^n} x^n\right)_{n \geq 1}$.

b. Somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Sol.

a. Cette série entière est la somme des deux séries entières $\left(\sum 2n\, x^{2n}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\sum \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n \geq 0}$.

On vérifie facilement (avec la règle de d'Alembert par exemple) que ces deux séries ont même rayon de convergence égal à 1, le rayon de convergence de leur somme est donc supérieur ou égal à 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$, alors la suite $\left(2n\, x^{2n}\right)_{n \geq 1}$ ne tend pas vers 0, or cette suite est extraite de la suite $\left(n^{(-1)^n} x^n\right)_{n \geq 1}$, donc cette suite $\left(n^{(-1)^n} x^n\right)_{n \geq 1}$ ne tend pas non plus vers 0, ce qui montre que la série numérique $\left(\sum n^{(-1)^n} x^n\right)_{n \geq 1}$ diverge grossièrement.

De ces résultats, on déduit que le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum n^{(-1)^n} x^n\right)_{n \geq 1}$ est égal à 1, et que cette série diverge aux deux bornes de l'intervalle ouvert de convergence.

b. On a pour tout $x \in]-1, 1[$: $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$, d'où en dérivant : $\dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\, x^{2n-1}$ et donc

$$\frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\, x^{2n}.$$

De $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$, on déduit aussi en intégrant terme à terme, pour tout $x \in]-1, 1[$: $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. On calcule : $\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{2}{1-t^2}$,

d'où $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\Big[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Ce qui donne avec le raisonnement de la question précédente :

Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 20

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt \end{cases}$.

a. Déterminer le développement en série entière de f par la méthode de l'équation différentielle, et donner le rayon de convergence de cette série entière.

b. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

Sol.

a. Notons $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \end{cases}$. La fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt$ est la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, ce qui suffit pour monter que $f(0) = 0$ et que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt = 1 - x f(x).$$

On en déduit que f est la solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Analyse : On suppose que f est développable en série entière sur $\left]-R, R\right[$ avec $R > 0$. Ce développement en série entière s'écrit : $\forall x \in \left]-R, R\right[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors pour tout $x \in \left]-R, R\right[$:

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, et

$x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$, et donc $f'(x) + x f(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1) a_{n+1} - a_{n-1}\right) x^n$.

On en déduit, d'après l'unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1$ sur $\left]-R, R\right[$ les résultats suivants :

(*i*) $a_1 = 1$.

(*ii*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0$.

Enfin, de $f(0) = 0$, on déduit :

(*iii*) $a_0 = 0$.

De (*ii*) et (*iii*) on déduit : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

De (*i*) et (*ii*), on déduit : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdots \frac{1}{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}$.

Synthèse : On considère la série entière $\left(\sum \frac{2^p \, p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right)$.

Soit $x > 0$, alors $\left| \dfrac{\frac{2^{p+1}(p+1)!}{(2p+3)!} x^{2p+3}}{\frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}} \right| = \dfrac{2(p+1)x^2}{(2p+2)(2p+3)} = \dfrac{x^2}{2p+3} \underset{p \to +\infty}{\to} 0$ ce qui montre avec la règle de d'Alembert que cette série entière est de rayon de convergence infini.

Enfin les calculs faits lors de l'analyse montrent que sa somme est solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Comme on sait que cette solution est unique, on en déduit que cette somme est égale à f.

En résumé, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.

b. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}$ et $e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$.

Le théorème d'intégration terme à terme pour une série entière montre alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Enfin le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) 2^k k!} \frac{x^{2n-2k}}{2^{n-k}(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \end{aligned}.$$

L'unicité du développement en série entière de f montre alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2^n \, n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}, \text{ et donc } \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Remarque : constater (sans calculer) que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et est une fonction impaire aurait pu alléger les calculs et les raisonnements du (a).

Exercice 21

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) a_{n+1} = -2(2n-1) a_n$.

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum a_n x^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

c. On note f la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence. Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f.

d. En déduire f.

e. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{4^n}$.

Sol.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n-1)(n!)^2} \neq 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{2n-1}{2n+1} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = -\frac{2(2n-1)}{n+1}$, d'où le résultat.

b. On en déduit aussi pour tout $x > 0$: $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{2(2n-1)x}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 4x$. La règle de d'Alembert assure alors que le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est égal à 4.

c. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ on a d'une part : $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

D'autre part : $-4x f'(x) + 2f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-4n+2) a_n x^n$,

d'où, avec la relation montrée au (a) : $f'(x) = -4x f'(x) + 2f(x)$. Comme $f(0) = a_0 = -1$, on en déduit que f est la solution sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ au problème de Cauchy : $(C) : \begin{cases} (\mathcal{E}) : \ y' - \dfrac{2}{4x+1} y = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

d. On calcule : $\int \frac{2}{4x+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln(1+4x) + cste$, donc la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ est $y : x \mapsto \frac{C}{\sqrt{1+4x}}$, et on a pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+4x}}$.

e. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n : \begin{pmatrix} \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n x^n \end{pmatrix}$, de sorte que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

On fixe d'abord $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$ et on a les résultats suivants, avec $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n$.

(*i*) La série $\left(\sum u_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une série alternée.

(ii) Avec la formule de Stirling, on a : $\left|u_n(x)\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{2n\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n} x^n = (4x)^n \dfrac{cste}{\sqrt{n}}$, ce qui montre, puisque

$0 \leq 4x \leq 1$, que $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

(iii) $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{2(2n-1)x}{n+1} \leq 4x \leq 1$, donc la suite $\left(\left|u_n(x)\right|\right)$ est décroissante.

On en déduit avec le théorème sur les séries alternées d'une part que la série numérique $\left(\sum u_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente,

donc que $f : x \mapsto -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, d'autre part que le reste d'ordre n vérifie :

$\left|R_n(x)\right| \leq \left|u_{n+1}(x)\right|$.

On a alors les résultats suivants :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|R_n(x)\right| \leq \left|u_{n+1}(x)\right| \leq \left|u_{n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)\right|$. Or on a montré que $\left|u_{n+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)\right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, ce qui montre

que la série de fonctions $\left(\sum u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.

On en déduit que la somme de cette série de fonctions est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, et par suite que f est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.

Ceci permet de calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{4^n} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{4},\, x < \frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{4},\, x < \frac{1}{4}} \frac{-1}{\sqrt{1+4x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 22

a. Déterminer a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(at + bt^2\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

__Sol.__

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a avec deux intégrations par parties (tout le monde est bien C^1) :

$$\int_0^{\pi} (a t + b t^2) \cos(n t)\, \mathrm{d}t = \left[(a t + b t^2) \frac{\sin(n t)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (a + 2 b t) \frac{\sin(n t)}{n}\, \mathrm{d}t$$

$$= 0 + \left[(a + 2 b t) \frac{\cos(n t)}{n^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 b \frac{\cos(n t)}{n^2}\, \mathrm{d}t \qquad ,$$

$$= \frac{(-1)^n (a + 2 b \pi) - a}{n^2} .$$

On pose $a = -1$ et $b = \dfrac{1}{2\pi}$ et on obtient bien : $\displaystyle\int_0^{\pi} (a t + b t^2) \cos(n t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

b. Pour $t \in \left]0, \pi\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i k t} \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t} - \mathrm{e}^{i t}}{\mathrm{e}^{i t} - 1} \right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\left(n + \frac{1}{2} t\right)} - \mathrm{e}^{i \frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^{i \frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-i \frac{t}{2}}} \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\left(n + \frac{1}{2} t\right)} - \mathrm{e}^{i \frac{t}{2}}}{2 i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right),$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k t) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\left(n + \frac{1}{2} t\right)} - \mathrm{e}^{i \frac{t}{2}}}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

On en déduit (la convergence de l'intégrale apparaissant dans cette écriture étant une conséquence de l'existence de celles composant la somme) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} \left(-t + \frac{t^2}{2\pi} \right) \left(\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t$.

Ce qui s'écrit aussi (l'existence de la première intégrale justifiant la convergence de la seconde intégrale) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} (2 \pi t - t^2)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{t^2 - 2 \pi t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t .$$

On sait que $\mathrm{sinc} : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, car développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule pas sur $\left]-\pi, \pi\right[$, donc $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^2 - 2 \pi t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{2 (t - 2\pi)}{\mathrm{sinc}(t)}$ est définie et de classe C^{∞} sur $[0, \pi]$.

On a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t^2 - 2 \pi t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t$, et l'on peut effectuer une intégration par parties

qui donne : $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t = \left[- \frac{\varphi(t) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\varphi'(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{n + \frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t$.

On en déduit en posant $M_0 = \sup_{[0,\pi]}(|\varphi|)$ et $M_1 = \sup_{[0,\pi]}(|\varphi'|)$ (qui existent bien car φ et φ' sont continues, donc bornées sur le segment $[0,\pi]$) : $\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{2M_0 + \pi M_1}{n+\frac{1}{2}}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t^2 - 2\pi t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \left(2\pi t - t^2\right)\mathrm{d}t$.

On calcule pour terminer : $\displaystyle\int_0^\pi \left(2\pi t - t^2\right)\mathrm{d}t = \left[\pi t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi^3}{3}$, ce qui donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 23

Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

Sol.

Supposons $\cos(1) = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\displaystyle\cos(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$. Cette série vérifiant clairement le théorème sur les séries alternées, $\cos(1)$ est strictement compris entre deux termes consécutifs de cette somme. En particulier il est compris strictement entre $\displaystyle a = \sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ et $\displaystyle a = \sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{(-1)^q}{(2q)!}$.

Donc $(2q)!\cos(1)$ est strictement compris entre $(2q)!a$ et $(2q)!a + (-1)^q$.

Or il est immédiat que les trois nombres $(2q)!\cos(1)$, $(2q)!a$ et $(2q)!a + (-1)^q$ sont des entiers, et qu'il n'y a pas d'entier entre les deux derniers. D'où la contradiction.

Exercice 24

Soit $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

a. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0. On donnera une expression de ce développement faisant intervenir $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

b. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

c. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n+1}$.

Sol.

a. On sait que $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que ce développement en série entière s'écrit :

$\forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = 1$.

On sait aussi que $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que ce développement en série entière s'écrit : $\forall x \in]-1,1[, \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = -\dfrac{1}{n}$.

Donc d'après le théorème sur le produit de Cauchy des séries entières, $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et ce développement en série entière s'écrit : $\forall x \in]-1,1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$, où

$c_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} b_{n-j} = \sum_{j=1}^{n} b_j = -H_n$.

b. D'après ce qui précède on a $R \geq 1$. Supposons $R > 1$, alors cette série entière convergerait en $x = 1$, et donc $c_n = -H_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, ce qui est contradictoire puisqu'on sait que $H_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$. Donc $R = 1$.

c. On a pour tout $x \in [0,1[$ (intégration terme à terme de cette série entière sur $[0,-x]$) :

$-\int_0^x g(-t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} -H_n \int_0^{-x} t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n H_n}{n+1} x^{n+1}$.

On pose alors $u_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1} H_n}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$.

Tout d'abord on fixe $x \in [0,1]$ et on a les résultats suivants :

(*i*) La série numérique $\left(\sum u_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une série alternée.

(*ii*) On connaît le résultat classique : $H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler.

On en déduit $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

(*iii*) Pour monter que la suite de terme général $|u_n(x)|$ est décroissante, il suffit de montrer pour tout $n \geq 2$

$\dfrac{H_n}{n+1} \leq \dfrac{H_{n-1}}{n}$. On raisonne par équivalence :

$\dfrac{H_n}{n+1} \leq \dfrac{H_{n-1}}{n} \Leftrightarrow n H_n \leq (n+1) H_{n-1} \Leftrightarrow n\left(H_n - H_{n-1}\right) \leq H_{n-1} \Leftrightarrow 1 \leq H_{n-1}$.

Comme il est évident que $1 \leq H_{n-1}$, on en déduit bien que la suite de terme général $|u_n(x)|$ est décroissante.

D'après le théorème sur les séries alternées, on en déduit que la série numérique $\left(\sum u_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que son reste d'ordre n vérifie : $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \dfrac{H_{n+1}}{n+2} x^{n+1} \leq \dfrac{H_{n+1}}{n+2}$.

De sorte qu'on a les résultats suivants concernant la série de fonctions $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

(*i*) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[0,1]$.

(*ii*) La série de fonctions $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ et son reste d'ordre n vérifie :

$\forall x\in[0,1], \left|R_n(x)\right|\leq\dfrac{H_{n+1}}{n+2}$, avec $\dfrac{H_{n+1}}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Donc la série de fonctions $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

On en déduit que la somme S de cette série de fonctions est continue sur $[0,1]$.

Et en particulier : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n+1}=S(1)=\lim_{x\to1,x<1}S(x)=\lim_{x\to1,x<1}-\int_0^x g(-t)\,\mathrm{d}t=-\lim_{x\to1,x<1}\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

C'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n+1}=-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

On calcule alors avec une intégration par parties ($u=\ln(1+t)$, $u'=\dfrac{1}{1+t}$, $v'=\dfrac{1}{1+t}$, $v=\ln(1+t)$) :

$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t=\left[\ln^2(1+t)\right]_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{\ln^2(2)}{2}$. En définitive, on a montré : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n+1}=-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t=-\frac{\ln^2(2)}{2}$.

Exercice 25

Calculer en utilisant une série entière : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

<u>Sol.</u>

Remarquons tout d'abord que :

$$\frac{\binom{n}{2n}}{\binom{n+1}{2n+2}}=\frac{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}{\dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{n+1}{2(2n+1)}\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{4}.$$

Ceci assure, d'après la règle de d'Alembert, que la série étudiée est bien convergente.

On note $a_n=\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$, et, pour tout $x\in\left]-1,1\right[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n}$

D'après ce qui précède, pour tout $x\neq0$, $\dfrac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}}=\dfrac{2n+2}{2n+1}x^2\underset{n\to+\infty}{\to}x^2$ et le rayon de convergence est bien égal à 1.

Le réel cherché est alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(2n+1)a_{n+1} = (2n+2)a_n$, ce qui devrait conduire à une équation différentielle vérifiée par f.

On a pour tout $x \in]-1,1[$: $x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$, puis $2x f(x) + x^2 f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2) a_n x^{2n+1}$, ou encore $2x^2 f(x) + x^3 f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2) a_n x^{2n+2}$.

D'autre part, $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{2n+2}$ et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2) a_{n+1} x^{2n+1}$, donc

$x f'(x) - f(x) + 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_{n+1} x^{2n+2}$. Il en résulte que

$x f'(x) - f(x) + 1 = 2x^2 f(x) + x^3 f'(x)$.

Ainsi, f est donc solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle résolue en y' :

$$(\boldsymbol{E}) :\ y' - \frac{1+2x^2}{x-x^3} y = -\frac{1}{x-x^3}.$$

Résolvons l'équation homogène $(\boldsymbol{H}) : y' - \frac{1+2x^2}{x-x^3} y = 0$.

On trouve que $\frac{1+2x^2}{x-x^3} = \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-x} - \frac{3}{2}\frac{1}{1+x}$, on en déduit que :

$\int \frac{1+2x^2}{x-x^3} = \ln(x) - \frac{3}{2}\ln(1-x) - \frac{3}{2}\ln(1+x) + cste$.

Les solutions de $(\boldsymbol{H})$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{Cx}{(1-x^2)^{3/2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Résolvons maintenant $(\boldsymbol{E})$ par la méthode de variation de la constante. On pose : $y(x) = \frac{zx}{(1-x^2)^{3/2}}$, et la fonction y est solution de $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si $\frac{zx}{(1-x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{x(1-x^2)}$, soit si et seulement si $z' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

Le changement de variable $t = \cos(u)$ donne :

$$\int^{x} -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int^{\arccos(x)} \tan^2(u)\,\mathrm{d}u \left[\tan(u) - u\right]^{\arccos(x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arccos(x) + cste.$$

On en déduit que y est solution de $(\boldsymbol{E})$ si et seulement si z est de la forme : $z : x \mapsto C - \arccos(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, ainsi les solutions de $(\boldsymbol{E})$ sur $]0,1[$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{x\left(C - \arccos(x)\right) + \sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est donc elle aussi de cette forme, avec, puisque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 : C = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement : $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ f(x) = \dfrac{x \arcsin(x)}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} + \dfrac{1}{1-x^2}$, et en particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} + \frac{4}{3} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{4}{3}.$$

Exercice 26

Soient les suites $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n}{n!}.$$

1. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.

3. Montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et indiquer sa limite.

4. On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, et donner une équation vérifiée par S.

5. On pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Déterminer le développement en série entière de f, son rayon de convergence ainsi que son expression en fonction de v_n.

6. Sur quel domaine le développement en série entière de f est-il valable ?

Corrigé

1. On a $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2$ puis $v_0 = 1,\ v_1 = 0,\ v_2 = \dfrac{1}{2}$ et $v_3 = \dfrac{1}{3}$.

2. On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{u_n}{n!} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = v_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - v_{n-1} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, puis $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(v_k - v_{k-1}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$, ce qui donne par télescopage : $v_n - v_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. En notant que $v_0 = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$, on a alors

$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. On sait que la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$ est convergente, de somme égale à e^{-1}. Cela revient à dire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et que $\lim_{n \to +\infty} v_n = e^{-1}$.

4. Pour déterminer le rayon de convergence, on peut par exemple utiliser la règle de d'Alembert : puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie non nulle, cette suite ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et vérifie $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$; la règle d'Alembert assure donc que le rayon de convergence de la série entière $\sum v_n x^n$ est égal à 1 .

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc pour tout $x \in]-1,1[$,

$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$, ce qui donne :

$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, ou encore : $S(x) - 1 = x S(x) + e^{-x} - 1$.

On en tire immédiatement :

$$\forall x \in]-1,1[, \ S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

5. Cf. la question précédente.

6. Pour tout $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Le rayon de convergence étant égal à 1 , $\sum v_n x^n$ diverge lorsque $|x| > 1$. Comme (v_n) admet une limite finie non nulle, $\sum v_n x^n$ diverge pour $x = \pm 1$. Le domaine de convergence du développement en série entière de f est donc égal à $]-1,1[$.

Exercice 27

1. On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(e^{n\theta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

b. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2. On considère maintenant la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} e^{k\theta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

a. Déterminer le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

b. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Corrigé

1. la série $\sum a_n z^n$ est géométrique. Elle a pour rayon de convergence $e^{-\theta}$, et pour tout z tel que $|z| < e^{-\theta}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \dfrac{1}{1 - e^{\theta} z}$.

2.a. Si $\theta = 0$, $b_n = n + 1$, et $\sum b_n z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Si $\theta \neq 0$, $b_n = \dfrac{e^{(n+1)\theta} - 1}{e^{\theta} - 1}$, donc :

Si $\theta < 0$, $b_n \sim 1$, et $\sum b_n z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Si $\theta > 0$, $b_n \sim \dfrac{e^{(n+1)\theta}}{e^{\theta} - 1}$, et, par la règle de d'Alembert, $\sum b_n z^n$ a pour rayon de convergence $e^{-\theta}$.

En résumé, le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est $\min\left\{e^{-\theta}, 1\right\}$.

2.b. On a $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}$, où $\left(c_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1. On reconnaît un produit de Cauchy ; on retrouve le fait que le rayon de convergence R de $\sum b_n z^n$ est supérieur ou égal à $\min\left\{e^{-\theta}, 1\right\}$. Il lui est égal d'après la question précédente, et l'on a pour tout z vérifiant $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \frac{1}{(1 - z)\left(1 - e^{\theta} z\right)}.$$

Exercice 28

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum \dfrac{x^n}{n!^2}\right)$.

b) On note f la somme de cette série entière. Montrer $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^x\right)$.

Solution

a) Soit $x > 0$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x^n}{n!^2} \neq 0$ et $\left|\dfrac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!^2}}{\frac{x^n}{n!^2}}\right| = \dfrac{x}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Ce qui, avec la règle de d'Alembert des séries numériques, permet d'affirme que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

b) Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. On fixe un tel n. On a alors pour tout $x > 0$:

$$0 \leq \frac{f(x)}{e^x} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!^2}}{e^x} + \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k!^2}}{e^x} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!^2}}{e^x} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}{e^x} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!^2}}{e^x} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}{e^x} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!^2}}{e^x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or par croissance comparée, $\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!^2}}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$, il existe donc $X \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \geq X$, $\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!^2}}{e^x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \geq X$, $0 \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \varepsilon$.

On a bien : $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^x\right)$.