Lycée Lakanal

2025 - 2026

PC

Feuille d'exercices

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Soit a un réel non nul. On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2+a^n}{n!}\right)$.

1. Pour quelle valeur de a la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit – elle une loi de probabilité ?

2. On suppose que la valeur de a est celle déterminée dans la question précédente. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = p_n$. Déterminer la probabilité que X soit paire.

Exercice 2

Soit $a \in \,]0,1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = a\,\mathbb{P}(X>n)$.

Quelle est la loi de X ? Son espérance ? Sa variance ?

Exercice 3

Ne pas faire tous les calculs en question 1 : on s'arrête dès que l'on a compris.

Soit X une variable aléatoire discrète.

1. Déterminer la probabilité de l'événement « X est paire » dans les cas suivants :

a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$;

b. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$;

c. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

2. Dans le cas où X suit l'une des trois lois ci – dessus, déterminer la probabilité que X soit divisible par 3.

Exercice 4

Soient X une variable aléatoire réelle discrète qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et $Y = (-1)^X$.

1. Calculer $P(Y=1)$.

2. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

Exercice 5

1. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

2. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire p boules de cette urne et on note X la variable aléatoire représentant le plus grand numéro tiré.

Calculer, pour $k \in X(\Omega)$, $P(X \leq k)$. En déduire la loi de X. Calculer l'espérance de X.

Exercice 6

Soient a et b deux réels compris strictement entre 0 et 1.

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément des pièces de monnaie notées A et B. On suppose que,

lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne « pile » est a, et que la probabilité que la pièce B donne « pile » est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne « face » pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne « face » pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilité de X et de Y ? Donner l'espérance de X.

2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$.

3. Trouver, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X > k)$.

En déduire les probabilités $\mathbb{P}(X > Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Exercice 7

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).

On définit la VAR N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, si N prend une valeur positive non nulle n, on réalise une seconde série de tirages d'une boule de l'urne, toujours avec remise.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue lors de cette seconde série de tirages.

1. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$.

3. Vérifier l'égalité $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

On pourra reconnaître une série géométrique dérivée $r-$ième, pour un entier r bien choisi.

4. Montrer que X possède une espérance, et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 8

Une tortue pond des œufs. Le nombre d'œufs est modélisé par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque œuf éclot avec probabilité $p \in]0,1[$.

- Donner la loi du nombre D de descendants.
- Rappeler la définition de variables aléatoires indépendantes.
- Soit E le nombre d'œufs n'ayant pas éclot. D et E sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Soit r un entier supérieur ou égal à 1. On considère une succession infinie d'épreuves aléatoires indépendantes, ayant toutes deux issues possibles : succès avec probabilité p, échec avec probabilité $1 - p$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et représentant le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le r - ième succès, si celui – ci est effectivement obtenu ; on attribue à X la valeur 0 lorsqu'on n'enregistre pas au moins r succès.

1. Déterminer $X(\Omega)$.

2. Pour $n \geq r$, déterminer la probabilité de l'événement $E_{n,r}$:

" Lors des $n-1$ premières épreuves, exactement $r-1$ succès sont enregistrés ".

3. En déduire $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \geq r$.

4. Préciser alors la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$. Que peut – on en déduire ?

Exercice 10

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes ayant toutes même probabilité de succès $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention d'un premier succès.

1. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance et sa variance.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes, que l'on note $X_1, ..., X_n$, ayant la même loi que X.

Déterminer la loi de $M_n = \min\left(X_1, ..., X_n\right)$.

3. Montrer que M_n admet une espérance et étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(M_n\right)$.

Exercice 11

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $U_0, \ldots, U_p$ des urnes telles que U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On choisit une urne au hasard de façon équiprobable, puis on tire dans cette urne n boules avec remise.

On note N_p le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de N_p et calculer son espérance.

Exercice 12

Soient un dé à n faces équilibré, T la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir chacune des n faces au moins une fois, et, pour $k \in \ 1, n \ $, T_k le nombre de lancers nécessaires pour obtenir une nouvelle k – ième face après avoir obtenu $k - 1$ faces distinctes.

1. Déterminer la loi de T_k.

2. Déterminer l'espérance de T.

3. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(T)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 13

On dispose de n bulbes qui fleurissent avec une probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres. Si un bulbe fleurit une année, alors il fleurit toutes les années suivantes. Sinon, il fleurit l'année suivante avec probabilité p. On pose $q = 1 - p$.

Soit T_h la variable aléatoire qui compte le nombre d'années nécessaires pour que le bulbe h fleurisse.

Soit T la variable aléatoire représentant le nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1. Déterminer la loi de T_h, puis celle de T.

2. Déterminer l'espérance de T.

Exercice 14

Une puce se déplace vers la droite sur une bande numérotée de 1 en 1 à partir de la case 0. Elle peut effectuer, de manière équiprobable, un saut de 0 ou 1 case à chaque saut. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire correspondant à la case atteinte au saut n, et Y_n le nombre de sauts de 1 case effectués jusqu'au saut n.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.

2. En déduire la loi de X_n.

Exercice 15

Un joueur tire au hasard des jetons. La variable aléatoire X représentant le nombre de jetons tirés vérifie :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$. Si le nombre de jetons tirés est un entier n pair le joueur gagne n jetons, sinon il en perd n.

Donner la probabilité de gagner, l'expression du gain algébrique G et son espérance.

Exercice 16

Deux entreprises doivent livrer chacune $2N$ pièces à un entrepôt, et ce avant un temps T. L'entreprise 1 envoie 2 camions, l'entreprise 2 en envoie un seul. Le temps nécessaire à l'arrivée d'un camion est compté en unités arbitraires, entières. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires donnant les temps d'arrivée des camions ; elles sont indépendantes, et suivent chacune une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{2}{T}$.

1. Déterminer les lois suivies par $E_1 = \min\left(X_1, X_2\right)$ et $E_2 = \max\left(X_1, X_2\right)$.

2. Quelle est la probabilité que le camion de la deuxième entreprise arrive strictement après les deux camions de la première ?

Exercice 17

On dispose de deux urnes U_1, U_2 contenant au total deux jetons. On effectue une série de tirages de la façon suivante :

On choisit aléatoirement l'une des deux urnes. Si elle est vide, on passe à l'autre. Puis, on tire un jeton de l'urne retenue, et l'on place ce jeton aléatoirement dans l'une des deux urnes.

On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de jetons dans U_1 au bout du n – ème tirage, et l'on pose $T_n = \begin{pmatrix} P\left(X_n = 0\right) \\ P\left(X_n = 1\right) \\ P\left(X_n = 2\right) \end{pmatrix}$. La variable aléatoire X_0 représentant le nombre de jetons contenus initialement dans U_1 vérifie $T_0 = \begin{pmatrix} P\left(X_0 = 0\right) \\ P\left(X_0 = 1\right) \\ P\left(X_0 = 2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, avec $p + q + r = 1$. On pose enfin $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau de A. Montrer que A possède trois valeurs propres distinctes $a < b < c$ et qu'elle est diagonalisable. Déterminer ses sous-espaces propres. Donner une matrice P dont la première ligne ne comporte que des 1, inversible et telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2. En déduire la loi de X_n.

3. Justifier le fait que $\left(T_n\right)$ admet une limite $\begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$. Reconnaître la variable aléatoire X telle que pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, $P\left(X = i\right) = \ell_i$.

Exercice 18

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Soit Y une variable aléatoire telle que :

- $Y = X$ si X est non nulle.
- Sinon, Y prend une valeur aléatoire entre 0 et n.

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 19

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $s = \left(s_1, ..., s_p\right) \in \{0\,;1\}^p$.

On considère une suite $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ mutuellement indépendantes, suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\alpha \in \left]0, 1\right[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \left\{ \omega \in \Omega \,/\, X_{np+1}(\omega) = s_1 ,\ X_{np+1}(\omega) = s_2 , \dots ,\ X_{(n+1)p} = s_p \right\}.$$

Si E est un événement, on désignera par E^c son complémentaire dans l'univers Ω.

1. Justifier l'assertion : $\omega \in \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup\limits_{i=k}^{+\infty} B_i \right) \Rightarrow s$ apparaît une infinité de fois dans $\left(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega) \right)$.

2. Montrer que la suite $\left(B_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est formée d'évènements mutuellement indépendants.

3. Déterminer l'événement $\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup\limits_{i=k}^{+\infty} B_i \right) \right)^c$.

4. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} B_i{}^c \right) = 0$.

5. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup\limits_{i=k}^{+\infty} B_i \right) \right) = 1$, et interpréter ce résultat.

Exercice 20

Une urne contient $N - 2$ boules vertes, 1 blanche et 1 rouge. On prélève au hasard toutes les boules de l'urne, une à une et sans remise.

1. Soient X_1 le rang d'apparition de la boule blanche, X_2 le rang d'apparition de la boule rouge. Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2, la loi du couple $\left(X_1, X_2 \right)$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont – elles indépendantes ?

2. Soit X le rang où on obtient pour la première fois une boule qui n'est pas verte.
Soit Y le rang où on obtient pour la deuxième fois une boule non verte.
Déterminer la loi de X, la loi de Y. Calculer les espérances de X et de Y.

Exercice 21

1. Soient $\left(X_{i,j} \right)_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On note $A = \left[X_{i,j} \right]_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$ et $D = \det(A)$. Déterminer l'espérance et la variance de D.

2. Généraliser en dimension n.

Exercice 22

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y lorsque :
$\forall k \in \mathbb{N}, P(X \ge k) \le P(Y \ge k)$.

1. Montrer que si $X \le Y$, alors X est stochastiquement inférieure à Y.
Vérifier que la réciproque est fausse, en choisissant deux variables aléatoires de Bernoulli pour contre-exemple.

2. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu - \lambda)$, où $0 < \lambda < \mu$, telles que X et Z sont indépendantes.
Déterminer la loi de $X + Z$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$, avec $p \le q$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.
On pourra noter $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in \ 1, n\ , X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$,
et $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in \ 1, n\ , Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, puis raisonner par récurrence.

Exercice 23

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\left(A_n \right)_{n \ge 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants, tous de même probabilité p. On note $q = 1 - p$.

On définit la suite de variables aléatoires $\left(T_n\right)_{n \geq 1}$ en posant, pour tout ω de Ω :

$$\begin{cases} T_1(\omega) = \inf\left(j \geq 1 \ / \ \omega \in A_j\right) \\ T_2(\omega) = \inf\left(j > T_1(\omega) \ / \ \omega \in A_j\right) \\ \ldots\ldots\ldots \\ T_{n+1}(\omega) = \inf\left(j > T_n(\omega) \ / \ \omega \in A_j\right) \end{cases}.$$

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de T_k, et vérifier qu'il s'agit bien d'une variable aléatoire.

2. Pour toute suite strictement croissante d'entiers $\left(n_k\right)_{k \geq 1}$, déterminer la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}\left(T_{k+1} - T_k = n_{k+1} - n_k \ / \ T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right)$$

3. En déduire l'égalité $\mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \ / \ T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right) = \mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \ / \ T_k = n_k\right)$.

4. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}\left(T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right)$?

5. Démontrer que les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_{k+1} - T_k$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 24

Soient X et Y deux VARD définies sur un probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$, et à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la matrice carrée définie par : $\forall\ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2,\ a_{i,j} = \mathbb{P}_{[Y = j]}\left(X = i\right)$.

1. Montrer que : $\forall\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

2. On note Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Montrer que la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = 1) \\ \mathbb{P}(X = 2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = n) \end{pmatrix}$ appartient à $\operatorname{Im} \Phi$.

<u>hint</u> *On utilisera la formule des probabilités totales en choisissant un SCE judicieux.*

3. On suppose les VAR X et Y indépendantes. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = 1$.

4. Inversement, on suppose que $\operatorname{rg}(A) = 1$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A.

a. Montrer que les colonnes de A sont proportionnelles à la matrice C de **Q2_**.

b. A l'aide de **Q1_**, montrer que : $\forall\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket,\ C_j = C$.

c. En déduire alors que les VAR X et Y sont indépendantes.

Exercice 25

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = r \int_0^1 x^{n-1} (1 - x)^r \, dx.$$

2. Calculer l'espérance et la variance de X si elles existent.

Exercice 26

On considère une urne contenant une proportion $p \in]0,1[$ de boules noires, et $q = 1 - p$ de boules rouges. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X la longueur de la première suite de boules de même couleur, et Y la longueur de la deuxième. Par exemple, pour une suite de tirages $NNNNRRRRRRNN\ldots$, on a $X = 4$ et $Y = 6$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

2. En déduire la loi de X.

3. Déterminer la loi de Y.

4. Vérifier rapidement que $E(X) \geq 2$.

5. Expliquer, sans calculs, pourquoi l'on a : $E(Y) \leq E(X)$.

6. Quelle est la loi de la longueur de la troisième suite de même couleur ?

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère que toutes les permutations de $[\![1, n]\!]$ sont équiprobables, et l'on note T_n la variable aléatoire représentant le nombre de points fixes d'une permutation choisie au hasard.
Calculer l'espérance et la variance de T_n.

Exercice 28

On considère une pièce équilibrée. On considère un lancer infini de pièces. On note $T_{X,Y}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour l'obtention de la séquence $X\,Y$, avec $X, Y \in \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

Donner les lois et les espérances de $T_{P,P}$, $T_{F,F}$, $T_{P,F}$, $T_{F,P}$.

Exercice 29

Soit (X, Y) un couple de v.a.r.d. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, telles que $X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \ , \ j \in J\}$, I et J étant des parties infinies de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. On suppose que la v.a.r. Y admet une espérance, et que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$.

1. Soit $i \in I$.

a. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y_i sur un espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{A}, P)$ telle que $Y_i(\Theta) = Y(\Omega)$,

et : $\forall\ j \in J$, $P(Y_i = y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j \ / \ X = x_i)$.

b. Montrer que la v.a.r. Y_i possède une espérance.

L'espérance de Y_i est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant $(X = x_i)$, et on la note $\mathbb{E}(Y \mid X = x_i)$.

On considère une var. Z prenant les valeurs $\mathbb{E}(Y \mid X = x_i)$, pour $i \in I$, avec la probabilité $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. La var. Z est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant X, et est notée $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

2. Montrer que la v.a.r. $\mathbb{E}(Y \mid X)$ admet une espérance.

3. Prouver alors la ***formule de l'espérance totale*** : $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)) = \mathbb{E}(Y)$,

ie : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{E}_{(X = x_i)}(Y).\mathbb{P}(X = x_i)$.

4. ***Application***

Une urne contient $p + 1$ boules numérotées de 0 à p. On considère l'expérience suivante :

- On choisit une boule au hasard dans l'urne, puis on l'y remet, mais on supprime toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à celui que l'on a tiré.

- On choisit ensuite une deuxième boule dans l'urne.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales respectivement au premier et au deuxième numéro tiré.

Déterminer l'espérance de X_2.

Exercice 30

On considère une suite $\left(X_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de VAR définies sur un même probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P} \right)$. On suppose ces VAR mutuellement indépendantes, et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left] 0, 1 \right[$. On note comme toujours $q = 1 - p$.

1.a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $Z_k = \left(\bigcap_{n \geq k} \left[X_n = 0 \right] \right) \cup \left(\bigcap_{n \geq k} \left[X_n = 1 \right] \right)$ est un événement.

b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k est négligeable. Interpréter ce résultat.

2. On considère la fonction $L : \Omega \to \mathbb{N}$ associant à toute éventualité appartenant à Z_1 la valeur 0, et à tout autre élément ω de Ω l'unique entier $n \geq 1$ tel que ω appartienne à $\left[X_n = X_{n-1} = \ldots = X_1 \right] \cap \left[X_{n+1} \neq X_1 \right]$.

a. Montrer que L est une variable aléatoire sur $\left(\Omega, \mathcal{T} \right)$.

b. Quelle est la loi de L ?

c. Montrer que L admet un moment d'ordre 2.

d. En déduire que L admet une espérance et une variance (*à ne pas calculer*).

e. Calculer $\mathbb{E}\left(L \right)$.

Exercice 31

Une urne contient n boules, dont a blanches et $n - a$ noires. Un joueur effectue des tirages au hasard dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne, jusqu'à obtention éventuelle de r boules blanches.

On note X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z_r le nombre de boules noires tirées, avec par convention : $X_r = 0$ et $Z_r = 0$ si le joueur effectue en vain une infinité de tirages.

1.a. Déterminer la loi de X_r. (*on dit que X_r suit la loi de Pascal de paramètres r et $\frac{a}{n}$*).

En déduire que : $\forall\ q \in \left]0, 1\right[,\ \forall\ r \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} = \frac{1}{\left(1 - q\right)^r}$.

b. Montrer que X_r admet une espérance, et calculer $\mathbb{E}\left(X_r \right)$.

c. Montrer que X_r admet une variance, et calculer $\mathbb{V}\left(X_r \right)$.

2.a. Trouver une relation liant les variables X_r et Z_r. En déduire la loi de Z_r.

(*on dit que Z_r suit la loi binomiale négative de paramètres r et $\frac{a}{n}$*).

b. Déterminer l'espérance et la variance de Z_r.

Exercice 32

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $X \leq Y$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X par rapport à l'évènement $\left(Y = n \right)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer que $Y - X + 1$ et X ont même loi.

Exercice 33

1. Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $n = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k 2^k$ où $\forall k \in \mathbb{N}, \varepsilon_k \in \{0,1\}$.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, les variables de Bernoulli X_n par la relation : $X = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k X_k$.

Déterminer $\mathrm{E}(X_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 34

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geq n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0,1[$.

2. Exprimer les $\mathbb{P}(T \geq n)$ en fonction des θ_k. Montrer que la série numérique $\left(\sum \theta_n\right)_{n\geq 0}$ est divergente.

3. Réciproquement soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1[$ telle que $\left(\sum \theta_n\right)$ est une série numérique divergente. Montrer qu'il existe une variable aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$ et $\theta_n = \mathbb{P}(T = n | T \geq n)$.

Retour sur la notion de tribu

Exercice 35

Tribu engendrée par une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Soit $\mathcal{A} = \{X^{-1}(F),\ F \subset \mathbb{R}\}$. Montrer que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_X)$ est un espace probabilisé.

On dit que $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire X.

Exercice 36

Soit E un ensemble. A toute partie A de E, on associe sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie de parties de E. Exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup_{i\in I} A_i}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_i}$.

2. Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties de E, on pose $\limsup_i (A_i) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n$ et $\liminf_i (A_i) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n$.

Exprimer avec des quantificateurs, puis en Français courant, ce que signifie $x \in \liminf_i (A_i)$ et $x \in \limsup_i (A_i)$.

3. Si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur E, à valeurs réelles et bornées, on définit les fonctions $\limsup_i (f_i)$ et $\liminf_i (f_i)$ par : $\forall x \in E$, $\limsup_i (f_i)(x) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sup_{n\geq p} f_p(x)\right)$ et $\liminf_i (f_i)(x) = \lim_{p\to+\infty}\left(\inf_{n\geq p} f_p(x)\right)$. Montrer que les fonctions $\limsup_i (f_i)$ et $\liminf_i (f_i)$ sont bien définies.

Montrer que $\mathbf{1}_{\limsup_i (A_i)} = \limsup_i \left(\mathbf{1}_{A_i}\right)$ et $\mathbf{1}_{\liminf_i (A_i)} = \liminf_i \left(\mathbf{1}_{A_i}\right)$.

Moments de variables aléatoires

Exercice 37

$2N$ individus forment N couples. M individus décèdent. Quel est le nombre moyen de couples restants ?

Exercice 38

Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On dispose de p boules qu'on place aléatoirement dans n tiroirs $T_1,\cdots,T_n$.

1. Déterminer la loi de X_k, nombre de boules situées dans le tiroir k.

2. Les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_k$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

3. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de tiroirs vides. Déterminer l'espérance de Y, puis sa variance.

Exercice 39

Espérance conditionnelle et espérance totale

Soit (X,Y) un couple de v.a.r.d. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$, telles que

$X(\Omega)=\{x_i\ ,\ i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j\ ,\ j\in J\}$, I et J étant des parties infinies de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. On suppose que la v.a.r. Y admet une espérance, et que pour tout $i\in I$, $\mathbb{P}(X=x_i)\neq 0$. On souhaite prouver la formule de l'espérance totale :

$\mathbb{E}(Y)=\sum_{x_i\in X(\Omega)}\mathbb{E}_{(X=x_i)}(Y).\mathbb{P}(X=x_i)$, où $\mathbb{E}_{(X=x_i)}(Y)$ désigne l'espérance de la loi de Y sachant $(X=x_i)$.

1. Dans cette question, on admet la formule de l'espérance totale.

Une urne contient $p+1$ boules numérotées de 0 à p. On considère l'expérience suivante :

- On choisit une boule au hasard dans l'urne, puis on l'y remet, mais on supprime toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à celui que l'on a tiré.
- On choisit ensuite une deuxième boule dans l'urne.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales respectivement au premier et au deuxième numéro tiré.

Déterminer l'espérance de X_2.

Dans les questions qui suivent, on prouve la formule de l'espérance totale.

2. Soit $i\in I$.

a. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y_i sur un espace probabilisé $(\Theta,\mathcal{A},P)$ telle que

$Y_i(\Theta)=Y(\Omega)$, et $\forall\ j\in J,\ P(Y_i=y_j)=\mathbb{P}(Y=y_j\ /\ X=x_i)$.

b. Montrer que la v.a.r. Y_i possède une espérance.

L'espérance de Y_i est appellée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant $(X=x_i)$, et on la note $\mathbb{E}(Y\mid X=x_i)$.

On considère une var. Z prenant les valeurs $\mathbb{E}(Y\mid X=x_i)$, pour $i\in I$, avec la probabilité $p_i=\mathbb{P}(X=x_i)$.

La var. Z est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant X, et est notée $\mathbb{E}(Y\mid X)$.

3. Montrer que la v.a.r. $\mathbb{E}(Y\mid X)$ admet une espérance.

4. Prouver alors que : $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y\mid X))=\mathbb{E}(Y)$, ie : $\mathbb{E}(Y)=\sum_{x_i\in X(\Omega)}\mathbb{E}_{(X=x_i)}(Y).\mathbb{P}(X=x_i)$.

Exercice 40

Variance et antirépartition

Soit X une v.a.r. définie sur un univers probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \sum_{k=0}^{n} k\,.\,\mathbb{P}(X > k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i\,(i-1)}{2}\,.\,\mathbb{P}(X = i) + \frac{n\,(n+1)}{2}\,\mathbb{P}(X > n)$.

2. En déduire que la v.a.r. $\frac{X\,(X-1)}{2}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} k\,.\,\mathbb{P}(X > k)$

converge, et que lorsque cette condition est réalisée, on a : $\mathbb{E}\left(\frac{X\,(X-1)}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,.\,\mathbb{P}(X > k)$.

3. Montrer que, toujours lorsque la condition précédente est réalisée : $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\,.\,\mathbb{P}(X > k)$.

4. Que vaut alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de l'anti – répartition ?

Vecteurs aléatoires discrets

Exercice 41

Déterminer la loi d'un minimum de n variables aléatoires indépendantes et toutes de même loi $\mathcal{G}(p)$.

Exercice 42

Soit $A \subset \mathbb{N}$. On dit que A vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout $k \in A$, un et un seul des éléments $k-1$ et $k+1$ appartient à A.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Quelle est la probabilité pour que $\{X, Y\}$ vérifie $\mathcal{P}$?

2. On note $F = \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_n\right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et déterminer sa dimension.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note v_n le nombre de parties A de $\{0, ..., n\}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.

Exercice 43

Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à $n\ (n \geq 2)$, on tire deux boules une à une, *sans remise*.

On désigne par X_1 (*resp.* X_2) la v.a.r. égale au n° de la 1ère (*resp.* 2nde) boule tirée.

On pose $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

2. Déterminer les lois marginales de X et Y .

3. Les v.a.r. X et Y sont – elles alors indépendantes ?

4. Calculer le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ des v.a.r. X et Y .

Exercice 44

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, on note $X \sim Y$ lorsqu'elles ont même loi.

Si X est une variable aléatoire réelle discrète, on dit que X est symétrique lorsque $X \sim -X$.

1. Soit X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes symétriques. A-t-on $(X,Y) \sim (X,-Y)$?

2. Soit n un entier ≥ 2, et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes symétriques indépendantes.

Pour $j \in\ 1,n$, on note $S_j = X_1 + \cdots + X_j$.

On fixe $k \in\ 1,n-1$, montrer que $(S_1, S_1, \cdots, S_k, S_n) \sim (S_1, S_1, \cdots, S_k, 2S_k - S_n)$.

Exercice 45

Soient $n \in \mathbb{N}$, U, V, et W trois VAR définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes, et telles que U et W suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et V suive une loi de Poisson de paramètre $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Déterminer les lois de X et de Y (*on redémontrera ce résultat du cours*).

2.a. Montrer que $\operatorname{cov}(X, Y)$ existe, et la calculer.

b. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X et de Y.

3.a. Déterminer la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

b. En déduire que l'espérance $\mathbb{E}(Y \mid X = n)$ de cette loi conditionnelle est égale à $\lambda + \dfrac{n\mu}{\lambda + \mu}$.

c. En déduire que $\mathbb{E}(Y \mid X = n) \geq n$ si, et seulement si, $\mathbb{E}(X) \geq n$.

Exercice 46

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = c\, \frac{i + j}{3^{i+j}\, i!\, j!} \quad .$$

1. Déterminer la valeur de c.

2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Ces deux variables aléatoires sont – elles indépendantes ?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

4. Déterminer l'espérance de 2^{X+Y}.

Exercice 47

Soit (X, Y) un couple de v.a.r.d. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et tel qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ pour lequel : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \dfrac{\lambda}{(n + m + 1)!}$.

1. Déterminer l'unique valeur possible du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Les v.a.r. X et Y sont – elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi de la v.a.r. $Z = X + Y$, puis calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 48

Soit n un entier ≥ 2. On note S_n l'ensemble des permutations de $1, n$ et X_n une variable aléatoire telle que X_n suit la loi uniforme $\mathcal{U}(S_n)$. On note $(x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots, x_{n,n}) = (X_n(1), X_n(2), \cdots, X_n(n))$.

$x_{n,1}$ et $x_{n,2}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 49

Le nombre de personnes se présentant à un bureau de poste est une VAR N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Une personne vient pour poster un envoi avec une probabilité p ($p \in]0, 1[$), et pour une autre opération (*retrait d'argent, gestion de compte* ...) avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération, et que toutes les personnes effectuent leurs opérations indépendamment les unes des autres. On note X la VAR égale au nombre de personnes venant poster un envoi , et Y la VAR égale au nombre de personnes venant pour une autre opération.

1. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de X conditionnellement à l'événement $[N = j]$?

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

3. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

4. Montrer que X et Y sont indépendantes.

5. Calculer $\operatorname{cov}(X, N)$ (***<u>hint :</u>*** *utiliser* $N = X + Y$!), et commenter son signe. Calculer $\rho_{X, N}$.

7. La VAR N peut – elle être une fonction quasi – affine de X ?

Exercice 50

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes définies sur un même probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et tel qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ pour lequel : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \dfrac{(n+m)\lambda^{n+m}}{\mathrm{e}\, n!\, m!}$.

1. Déterminer l'unique valeur possible du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $Z = 2^{X+Y}$ admet une espérance, et calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Approximation

Exercice 51

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que X et $\dfrac{1}{X}$ admettent une espérance finie.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geq \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 52

Soit E un ensemble fini non vide, et A une partie de E. On note $p = \dfrac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(E)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages avec remise dans l'ensemble E, et, pour $i \in 1, n$, on note X_i le résultat du i-ème tirage, et $S = \dfrac{1}{n} \operatorname{Card}\left(\left\{ i \in 1, n \,/\, X_i \in A \right\}\right)$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer : $\mathbb{P}\left(\left|S - p\right| < r\right) \geq 1 - \dfrac{1}{4nr^2}$.

Exercice 53

On a n urnes numérotées de 1 à n et N boules numérotées de 1 à N, où $N = a\,n$, où a est un entier fixé non nul. On place « au hasard » et de manière indépendante chacune des N boules dans une des urnes. Soit Y_n la VAR égale au nombre d'urnes vides, et $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$. Pour $i \in 1, n$, on note enfin T_i la VAR égale à 1 si l'urne numéro i est vide, et 0 sinon.

1. Pour $i \in 1, n$, déterminer la loi de T_i, et préciser son espérance et sa variance.

2. Soit $(i, j) \in 1, n^2 \,/\, i < j$. Calculer $\mathbb{E}(T_i T_j)$, puis $\operatorname{cov}(T_i, T_j)$.

3. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(S_n)$.

4. Calculer $\mathbb{V}\left(S_n\right)$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}\left(S_n\right)$.

5.a. Montrer que : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n \geq n_0,\ \left[\left|S_n - e^{-a}\right| \geq \varepsilon\right] \subset \left[\left|S_n - \mathbb{E}\left(S_n\right)\right| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$.

b.* En déduire que : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|S_n - e^{-a}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$. Conclure.

Exercice 54

On considère une suite de variables aléatoires $\left(X_i\right)_{i \geq 0}$ mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $Y_i = \left(X_i - X_{i+1}\right)^2$.

1. Déterminer la loi de Y_i. Les variables aléatoires Y_i sont-elles indépendantes ?

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} Y_i - 2p(1-p)\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 55

Soit X une var. définie sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$.

On suppose X bornée, *i.e.* que : $\exists\ \beta \in \mathbb{R}_+^*\ /\ \forall\ \omega \in \Omega,\ \left|X(\omega)\right| \leq \beta$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que : $\mathbb{P}\left(\left|X\right| > \alpha\right) \geq \dfrac{\mathbb{E}\left(X^2\right) - \alpha^2}{\beta^2}$.

Exercice 56

Soit $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VAR indépendantes définies sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$, à valeurs dans $\left\{-1, 1\right\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -1\right) = \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que pour tout t réel, on a $\mathbb{E}\left(e^{tX_n}\right) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

On rappelle que la fonction exponentielle est somme d'une série…

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

2.a. Calculer $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)$ en fonction des nombres $\mathbb{E}\left(e^{tX_k}\right)$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b. Calculer pour tout t réel, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(e^{\frac{tS_n}{\sqrt{n}}}\right)$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Montrer que, pour tout t réel : $\mathbb{P}\left(S_n \geq a\right) \leq e^{-ta}\,\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)$.

b. En déduire enfin un majorant de $\mathbb{P}\left(\left|S_n\right| \geq a\right)$.

Exercice 57

1. Enoncer et démontrer le théorème de stabilité des lois de Poisson.

2. On pose $Q_n(x) = e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{2n} \dfrac{x^k}{k!}$. Montrer en vous aidant de la question précédente que $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n(n) = 1$.

Exercice 58

Une urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion de boules blanches présentes dans l'urne est $p \in]0, 1[$.

On effectue n tirages successifs et avec remise d'une boule. Soit X_n la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Donner la loi de X_n.

2. Montrer que $\mathbb{V}(X_n) \leq \dfrac{n}{4}$.

3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev, donner une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right)$.

4. Comment doit – on choisir n pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à $5\ \%$ que $\dfrac{X_n}{n}$ est une valeur approchée de p à 10^{-2} près ?

Exercice 59

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires <u>i.i.d.</u> suivant la loi de X, et N une variable aléatoire indépendante des X_i, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $S(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$.

a. Soient $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{G}_N$ les séries génératrices de X, S et N. Montrer que : $\forall\ t \in [0, 1]$, $\mathcal{G}_S(t) = (\mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_X)(t)$.

b. On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance, et la calculer.

c. On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S admet un moment d'ordre 2, et calculer $E(S^2)$.

d. On étudie la transmission du nom de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants de sexe masculin suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$. On note Z_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants à la $n-$ème génération. On suppose que $Z_0 = 1$.

i. Ecrire une fonction en Python renvoyant le nombre de descendants masculins à la $n-$ème génération.

ii. Fixer λ et n. Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, du nombre de descendants masculins. Comparer à $E(Z_n)$.

Exercice 60

a. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Calculer $E(X)$. Donner sa fonction génératrice.

b. Soient $X_1, ..., X_p$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$.

On pose $S_p = X_1 + ... + X_p$. Déterminer la fonction génératrice de S_p.

c. Ecrire une fonction permettant de calculer les coefficients des puissances d'un polynôme (donné par ses coefficients). Ecrire une fonction permettant de calculer la somme des k premiers coefficients d'un polynôme.

d. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = P(S_p \leq k)$. Observer expérimentalement le comportement de u_p.

Démontrer le résultat.

Exercice 61

Soient N et $X_1, X_2, ...$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que les var. $X_1, X_2, ...$ suivent toutes une loi de Bernoulli de même paramètre p, et que N est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (1 - X_k)$.

1. Pour $(t, u) \in [-1, 1]^2$, exprimer $E\left(t^X u^Y\right)$ à l'aide de la fonction génératrice de N.
2. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose X et Y indépendantes. Montrer que N suit une loi de Poisson.

Exercice 62

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que les racines de P sont toutes négatives si et seulement si les coefficients de P sont tous de même signe.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne une variable aléatoire Y à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on note $P = G_Y$ sa fonction génératrice, et on suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que Y suit la même loi qu'une somme de n variables de Bernoulli indépendantes.