Feuille d'exercices

Variables aléatoires discrètes : quelques premiers corrigés

Exercice 3

Ne pas faire tous les calculs en question 1 : on s'arrête dès que l'on a compris.

Soit X une variable aléatoire discrète.

1. Déterminer la probabilité de l'événement « X est paire » dans les cas suivants :

a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$;

b. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$;

c. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

2. Dans le cas où X suit l'une des trois lois ci – dessus, déterminer la probabilité que X soit divisible par 3 .

Dans les trois cas, il s'agit de calculer $S = \sum\limits_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \text{ pair}}} \mathbb{P}(X = k)$, et la technique utilisée pour cela est connue depuis le début de première année…

1.a. Ici $S = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; on pose $T = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, et deux formules du binôme nous donnent :

$$S + T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$$

et $$S + T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k p^k (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n.$$

On en déduit alors que :

$$\boxed{S = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}}.$$

1.b. Maintenant :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \\ &= p(1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^2 \right)^k \quad \text{après changement d'indice,} \end{aligned}$$

donc : $$\boxed{S = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}}.$$

1.c. Même principe qu'en **1.a.** :

Ici $S = e^{-\lambda} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$; On pose également $T = e^{-\lambda} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$,

et l'on a : $\begin{cases} S + T = e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 ; \\ S - T = e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2\lambda} \end{cases}$, d'où : $\boxed{S = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}}$.

2. • Lorsque X suit la loi $\mathcal{G}(p)$, la probabilité cherchée est :

$$S = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ divisible par } 3}}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{3n-1},$$

et cette somme est encore géométrique. On obtient :

$$\boxed{S = p(1-p)^2 \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{(1-p)^2}{3 - 3p + p^2}}.$$

•• Supposons maintenant que X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. La probabilité cherchée est alors donnée par la somme :

$$S = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ divisible par } 3}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pour calculer S, on s'inspire de la méthode utilisée en **1.** : notons E_n l'ensemble des entiers $k \in \{0, ..., n\}$ qui sont divisibles par 3 (on a donc $S = \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$) ; considérons également l'ensemble F_n des entiers de $\{0, ..., n\}$ dont le reste dans la division par 3 est 1, et l'ensemble G_n des entiers de $\{0, ..., n\}$ dont le reste dans la division par 3 est 2. Posons $T = \sum_{k \in F_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, et

$$U = \sum_{k \in G_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Notons enfin $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

∘ On a $S + T + U = \sum_{k \in [\![0, n]\!]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$.

∘∘ Remarquons que $j^3 = 1$, de sorte que pour tout k :

$$j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est de la forme } 3k', \text{ ie. si } k \text{ est divisible par } 3 \\ j & \text{si le reste de la divion de } k \text{ par } 3 \text{ est } 1, \text{ ie. si } k \text{ est de la forme } 3k' + 1 \\ j^2 & \text{si le reste de la divion de } k \text{ par } 3 \text{ est } 2, \text{ ie. si } k \text{ est de la forme } 3k' + 2 \end{cases}.$$

Il en résulte que $S + jT + j^2 U = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \binom{n}{k} (jp)^k (1-p)^{n-k}$, d'où :

$$S + jT + j^2 U = \left(1 + (j-1)p\right)^n .$$

∘∘∘ De la même façon, pour tout entier k, $\left(j^2\right)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est divisible par } 3 \\ j^2 & \text{si le reste de la divion de } k \text{ par } 3 \text{ est } 1 \\ j & \text{si le reste de la divion de } k \text{ par } 3 \text{ est } 2 \end{cases}$,

et l'on en tire : $S + j^2 T + jU = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \binom{n}{k} \left(j^2 p\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(1 + \left(j^2 - 1\right)p\right)^n$.

Finalement : $\begin{cases} S + T + U = 1 \\ S + jT + j^2 U = \left(1 + (j-1)p\right)^n \\ S + j^2 T + jU = \left(1 + \left(j^2 - 1\right)p\right)^n \end{cases}$. En sommant ces trois lignes, et en se rappelant que

$1 + j + j^2 = 0$, on obtient :

$$\boxed{S = \frac{1 + \left(1 + (j-1)p\right)^n + \left(1 + \left(j^2 - 1\right)p\right)^n}{3}} .$$

••• Je ne corrige pas le cas où X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$: la méthode est exactement la même.

Exercice 4

Soient X une variable aléatoire réelle discrète qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et $Y = (-1)^X$.

1. Calculer $P(Y = 1)$.

2. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

1. On a : $(Y = 1) \Leftrightarrow \left((-1)^X = 1\right) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N}, X = 2p)$.

On en déduit $P(Y = 1) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(X = 2p) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^{2p}}{(2p)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda)$.

Remarquons qu'on a de même $P(Y = -1) = \mathrm{e}^{-\lambda} \operatorname{sh}(\lambda)$, et qu'on retrouve la relation triviale (puisque Y est à valeurs dans $\{-1, 1\}$) : $P(Y = 1) + P(Y = -1) = 1$.

2. Comme Y est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, on a :

$$\mathrm{E}(Y) = -P(Y = -1) + P(Y = 1) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\operatorname{ch}(\lambda) - \operatorname{sh}(\lambda)\right) = \mathrm{e}^{-2\lambda} .$$

Exercice 5

1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Montrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

2. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On tire p boules de cette urne et on note X la variable aléatoire représentant le plus grand numéro tiré.

Calculer, pour $k \in X(\Omega)$, $P(X \leq k)$. En déduire la loi de X. Calculer l'espérance de X.

1. Il s'agit de prouver la formule de Pascal généralisée. On procède par récurrence sur $n \geq p$. Pour $n = p$ on a bien $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$. S'il est vrai pour un certain $n \geq p$, on a alors avec l'hypothèse de récurrence et la formule du triangle de Pascal : $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$, ce qui établit la récurrence.

2. Il est immédiat que $X(\Omega) = [\![p, n]\!]$. Soit $k \in [\![p, n]\!]$, dire que $X \leq k$ revient à dire que les p boules tirées sont parmi les k premières, on en déduit (nombre de cas équiprobables possibles sur nombre de cas équiprobables totaux) : $P(X \leq k) = \dfrac{\binom{k}{p}}{\binom{n}{p}}$, et donc $P(X = p) = \dfrac{1}{\binom{n}{p}}$ et pour $k \in [\![p+1, n]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{\binom{k}{p} - \binom{k}{p-1}}{\binom{n}{p}} = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}.$$ Cette dernière formule est encore valable pour $k = p$.

On calcule alors : $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{k=p}^{n} k \binom{k-1}{p-1}$,

or $k\binom{k-1}{p-1} = k \dfrac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!} = p \dfrac{k!}{p!(k-p)!} = p\binom{k}{p}$, d'où avec le (a) :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = p \frac{\binom{n+1}{p+1}}{\binom{n}{p}} = p \frac{\dfrac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}}{\dfrac{n!}{p!(n-p)!}} = \frac{(n+1)p}{p+1}.$$

Exercice 11

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $U_0, \ldots, U_p$ des urnes telles que U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On choisit une urne au hasard de façon équiprobable, puis on tire dans cette urne n boules avec remise.

On note N_p le nombre de boules blanches. Déterminer la loi de N_p et calculer son espérance.

On note X le numéro de l'urne choisie, de sorte que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$.

La variable aléatoire N_p est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. La formule des probabilités totales donne :

$$P(N_p = j) = \sum_{k=0}^{n} P(N_p = j \mid X = k) P(X = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P(N_p = j \mid X = k).$$

La probabilité conditionnelle de $\left(N_p = j\right)$ sachant $\left(X = k\right)$ est la probabilité d'obtenir j succès lors d'une suite de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\frac{k}{n}$.

On reconnaît une loi binomiale : $P\left(N_p = j \mid X = k\right) = \binom{n}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-j}$.

On a donc : $P\left(N_p = j\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-j}$.

On sait que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $\left(n, p\right)$ est $n\,p$, donc

$\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-j} = k$.

On en déduit que :

$$\mathrm{E}\left(N_p\right) = \sum_{j=0}^{n}\frac{j}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-j} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}\left(\frac{k}{n}\right)^j\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-j},$$

d'où $\mathrm{E}\left(N_p\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}$.

Autre raisonnement plus simple : Si on note N'_p le nombre de boules noires, la symétrie du problème montre que N_p et N'_p suivent la même loi, donc ont même espérance et, comme $N_p + N'_p = n$, on a bien :

$\mathrm{E}\left(N_p\right) = \mathrm{E}\left(N'_p\right) = \frac{n}{2}$.

Exercice 13

On dispose de n bulbes qui fleurissent avec une probabilité $p \in \left]0, 1\right[$, indépendamment des autres. Si un bulbe fleurit une année, alors il fleurit toutes les années suivantes. Sinon, il fleurit l'année suivante avec probabilité p. On pose $q = 1 - p$.

Soit T_h la variable aléatoire qui compte le nombre d'années nécessaires pour que le bulbe h fleurisse.

Soit T la variable aléatoire représentant le nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1. Déterminer la loi de T_h, puis celle de T.

2. Déterminer l'espérance de T.

On note pour $k \in 1,n$, T_k le nombre d'années nécessaires pour que le k- ième bulbe commence à fleurir. Il est alors immédiat que T_k- G (p) c'est-à-dire : T_k est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P(T_k = m) = q^{m-1}p$ (où $q = 1 - p$). On a aussi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(T_k > m) = q^m$ (dire que $T_k > m$, c'est dire que le bulbe numéro k n'a pas fleuri pendant les m premières années), d'où on déduit $P(T_k \le m) = 1 - q^m$.

Or l'évènement $T \le m$ est l'évènement : Tous les bulbes ont fleuri au plus tard l'année m, c'est donc l'évènement $\bigcap_{k=1}^{n}(T_k \le m)$. Comme les variables aléatoires T_k sont indépendantes, on en déduit :

$$P(T \le m) = \prod_{k=1}^{n} P(T_k \le m) = \left(1 - q^m\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k q^{mk}.$$

D’où $P(T>m)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}q^{mk}$, Ce qui, par combinaison linéaire, suffit à montrer la convergence de la série de terme général $P(T>m)$, donc l’existence de l’espérance de T, et la formule :

$$\mathrm{E}(T)=\sum_{m=0}^{+\infty}P(T>m)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{1-q^{k}}.$$

Exercice 14

Une puce se déplace vers la droite sur une bande numérotée de 1 en 1 à partir de la case 0. Elle peut effectuer, de manière équiprobable, un saut de 0 ou 1 case à chaque saut. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire correspondant à la case atteinte au saut n, et Y_n le nombre de sauts de 1 case effectués jusqu’au saut n.

1. Donner la loi, l’espérance et la variance de Y_n.

2. En déduire la loi de X_n.

Exercice 21

1. Soient $\left(X_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On note $A=\left[X_{i,j}\right]_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$ et $D=\det(A)$. Déterminer l’espérance et la variance de D.

2. Généraliser en dimension n.

On va directement trouver une relation de récurrence. On note, pour $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\mathrm{V}(D_n)$

On a immédiatement en dimension $n=1$: $A=X_{1,1}$, $D_1=X_{1,1}$, $\mathrm{E}(D_1)=0$, $v_1=\mathrm{V}(D_1)=\mathrm{E}(D_1^n)=1$.

On note, en dimension n, $A_{i,j}$ la matrice extraite de A en enlevant la i-ème ligne, et la j-ème colonne, de sorte que

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}X_{1,j}\det(A_{1,j}).$$

Avec la linéarité de l’espérance, et l’indépendance de $X_{1,j}$ et $\det(A_{1,j})$ (lemme des coalitions) on obtient :

$\mathrm{E}(D_n)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\mathrm{E}(X_{1,j})\mathrm{E}(\det(A_{1,j}))$, d’où (puisque $\mathrm{E}(X_{i,j})=0$) : $\mathrm{E}(D_n)=0$.

On a aussi : $D_n^2=\sum_{j=1}^{n}X_{1,j}{}^2\left(\det(A_{1,j})\right)^2+2\sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^{j+k}X_{1,j}X_{1,k}\det(A_{1,j})\det(A_{1,k})$,

Ce qui donne toujours avec le même raisonnement :

$$v_n=\mathrm{E}(D_n^2)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}(X_{1,j}{}^2)\mathrm{E}\left(\left(\det(A_{1,j})\right)^2\right)=\sum_{j=1}^{n}v_{n-1}=n\,v_{n-1}.$$

On en déduit facilement : $v_n=n!$

Exercice 22

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y lorsque : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$.

1. Montrer que si $X \leq Y$, alors X est stochastiquement inférieure à Y.

Vérifier que la réciproque est fausse, en choisissant deux variables aléatoires de Bernoulli pour contre-exemple.

2. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu - \lambda)$, où $0 < \lambda < \mu$, telles que X et Z sont indépendantes.

Déterminer la loi de $X + Z$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$, avec $p \leq q$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

On pourra noter $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$,

et $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, puis raisonner par récurrence.

1. Si $X \leq Y$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X \geq k) \subset (Y \geq k)$, donc $P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ où $p \leq q$, alors $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = 1$, pour tout $k \geq 2$, $P(X = k) = P(Y = k) = 0$, et $P(X = 1) = p \leq P(Y = 1) = q$, donc X est stochastiquement inférieure à Y. Or il n'a a aucune raison pour que l'on ait $X \leq Y$, il suffit de choisir $p = \dfrac{1}{4}$ et $Y = 1 - X$ pour s'en convaincre.

D'une façon générale, on remarquera que le fait pour X d'être stochastiquement inférieure à Y ne dépend que des lois de X et de Y.

2. On sait que les fonctions génératrices de X et Z sont (pour $t \in [-1, 1]$) : $\varphi_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $\varphi_Z(t) = e^{(\mu-\lambda)(t-1)}$, et, puisque X et Z sont indépendantes, $\varphi_{X+Z}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{\mu(t-1)}$.

Comme la fonction génératrice détermine la loi, on en déduit : $X + Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.

Comme $X \leq X + Z$, on en déduit que X est stochastiquement inférieure à $X + Z$, et comme cette notion ne dépend que des lois, et que $X + Z$ et Y ont même loi, on en déduit que X est stochastiquement inférieure à Y.

3. On sait que l'on peut modéliser X par la somme de n variables aléatoires indépendantes X_i telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. On peut donc poser $X = X_1 + \cdots + X_n$, $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, et montrer par récurrence sur n que X est stochastiquement inférieure à Y.

La proposition est vraie pour $n = 1$ (cf. Q1). Si elle est vraie pour $n - 1$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

(pour $k = 0$ on a $P(X_1 + \cdots + X_n \geq k) = P(Y_1 + \cdots + Y_n \geq k) = 1$)

Ainsi $P(X_1 + \cdots + X_n \geq k)$

$$= P\big((X_1 + \cdots + X_{n-1} \geq k) \cap (X_n = 0)\big) + P\big((X_1 + \cdots + X_{n-1} \geq k - 1) \cap (X_n = 1)\big)$$

$$= P(X_1 + \cdots + X_{n-1} \geq k)(1 - p) + P(X_1 + \cdots + X_{n-1} \geq k - 1)p \quad \text{(indépendance)}$$

$$= P(X_1 + \cdots + X_{n-1} \geq k)(1 - p) + P(X_1 + \cdots + X_{n-1} \geq k - 1)p$$

$\leq P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} \geq k\right)\left(1 - p\right) + P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} \geq k - 1\right) p$ (hypothèse de récurrence)

$= P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = k - 1\right) p + P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} \geq k\right)$

$\leq P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} = k - 1\right) q + P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} \geq k\right) (p \leq q)$

$= P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} \geq k\right)\left(1 - q\right) + P\left(Y_1 + \cdots + Y_{n-1} \geq k - 1\right) q$

$= P\left(Y_1 + \cdots Y_n \geq k\right).$

D'où le résultat.

Exercice 23

Soient $\left(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé et $\left(A_n\right)_{n \geq 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants, tous de même probabilité p. On note $q = 1 - p$.

On définit la suite de variables aléatoires $\left(T_n\right)_{n \geq 1}$ en posant, pour tout ω de Ω :

$$\begin{cases} T_1\left(\omega\right) = \inf\left(j \geq 1 \;/\; \omega \in A_j\right) \\ T_2\left(\omega\right) = \inf\left(j > T_1\left(\omega\right) \;/\; \omega \in A_j\right) \\ \ldots\ldots\ldots \\ T_{n+1}\left(\omega\right) = \inf\left(j > T_n\left(\omega\right) \;/\; \omega \in A_j\right) \end{cases}.$$

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de T_k, et vérifier qu'il s'agit bien d'une variable aléatoire.
2. Pour toute suite strictement croissante d'entiers $\left(n_k\right)_{k \geq 1}$, déterminer la probabilité conditionnelle :
$$\mathbb{P}\left(T_{k+1} - T_k = n_{k+1} - n_k \;/\; T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right)$$
3. En déduire l'égalité $\mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \;/\; T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right) = \mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \;/\; T_k = n_k\right)$.
4. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}\left(T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right)$?
5. Démontrer que les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_{k+1} - T_k$ sont mutuellement indépendantes.

1. Décryptons :

T_1 est l'application $T_1 : \begin{pmatrix} \Omega \to \mathbb{N} \\ \omega \mapsto \begin{pmatrix} \inf\left\{j \in \mathbb{N}^*, \omega \in A_j\right\} \text{ si } \left\{j \in \mathbb{N}^*, \omega \in A_j\right\} \neq \varnothing \\ 0 \quad \text{ si } \left\{j \in \mathbb{N}^*, \omega \in A_j\right\} = \varnothing \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Autrement dit : $\left[T_1 = 0\right]$ est l'événement « aucun des événements A_j n'est réalisé », et, pour $j \geq 1$, $\left[T_1 = j\right]$ est l'événement « A_j est le premier des A_n à être réalisé ».

Finalement, T_1 est le temps d'attente du premier succès, lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, toutes de même paramètre p (en convenant de poser $T_1 = 0$ si l'on n'obtient jamais de succès).

Le cours assure alors que T_1 est bien une variable aléatoire, et qu'elle suit la loi géométrique de paramètre p : T_1 est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (donc $\mathbb{P}\left(T_1 = 0\right) = 0$), et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(T_1 = j\right) = p\,q^{j-1}$.

On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, T_n est le temps d'attente du $n^{\text{ième}}$ succès, en convenant de poser $T_n = 0$ s'il n'y a pas de $n^{\text{ième}}$ succès : l'initialisation, on vient de la faire ; quant à l'hérédité : supposons que T_n représente bien le temps d'attente du $n^{\text{ième}}$ succès. $T_{n+1}(\omega) = \inf\left(j > T_n(\omega) \ / \ \omega \in A_j\right)$ signifie que pour $j \in \mathbb{N}^*$, $\left[T_{n+1} = j\right]$ est l'événement : « A_j est le premier des A_n à être réalisé après le $n^{\text{ième}}$ succès », ce qui revient bien à « j est le temps d'attente du $(n+1)^{\text{ième}}$ succès ». On convient de poser $T_{n+1}(\omega) = 0$ si $T_n(\omega) = 0$ ou si $\left\{j > T_n(\omega) \ / \ \omega \in A_j\right\} = \varnothing$ signifie que l'on pose $T_{n+1} = 0$ s'il n'y a pas de $n^{\text{ième}}$ succès ou s'il n'y a pas d'autre succès après celui – ci, bref que l'on pose $T_{n+1}(\omega) = 0$ lorsqu'il n'y a pas de $(n+1)^{\text{ième}}$ succès.

Moyennant quoi, on a montré 36 fois que T_n est bien une variable aléatoire, et qu'elle suit la loi de Pascal $\mathcal{Pa}(n, p)$: T_n est presque sûrement à valeur dans $n, +\infty$, et pour tout $j \geq n$, $\mathbb{P}\left(T_n = j\right) = \binom{j-1}{n-1} p^n q^{n-j}$.

2. Si l'on suppose $\bigcap_{i=1}^{k}\left[T_i = n_i\right]$ réalisé, $\left[T_{k+1} = n_{k+1} - n_k\right]$ est réalisé si et seulement s'il y a échec aux épreuves $n_k + 1, \ldots, n_{k+1} - 1$, puis succès à l'épreuve n_{k+1} :

$$\mathbb{P}\left(T_{k+1} - T_k = n_{k+1} - n_k \mid T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=n_k+1}^{n_{k+1}-1} \overline{A_i}\right) \cap A_{n_{k+1}}\right) = q^{n_{k+1} - n_k - 1} p$$

3. On peut reprendre exactement la même explication : Si l'on suppose $\left[T_n = n_k\right]$ réalisé, $\left[T_{k+1} = n_{k+1} - n_k\right]$ est réalisé si et seulement s'il y a échec aux épreuves $n_k + 1, \ldots, n_{k+1} - 1$, puis succès à l'épreuve n_{k+1} :

$\mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \ / \ T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right) = \mathbb{P}\left(T_{k+1} = n_{k+1} \ / \ T_k = n_k\right)$.

4. On a $\mathbb{P}\left(T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k\right) = p^k q^{n_k - 1}$ (succès aux épreuves $n_1, \ldots, n_k$, échec à toutes les autres épreuves d'indice $j \leq n_k$).

5. Il résulte de **Q3** que $T_{k+1} - T_k$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, et que cette loi ne dépend pas des valeurs prises par $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_k - T_{k-1}$. On en déduit facilement par récurrence que $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_k - T_{k-1}, \ldots$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 24

Soient X et Y deux VARD définies sur un probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans $1, n$.

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ la matrice carrée définie par : $\forall (i, j) \in 1, n^2$, $a_{i,j} = \mathbb{P}_{[Y = j]}(X = i)$.

1. Montrer que : $\forall j \in \ 1, n \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

2. On note Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Montrer que la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X=1) \\ \mathbb{P}(X=2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X=n) \end{pmatrix}$ appartient à $\operatorname{Im} \Phi$.

hint *On utilisera la formule des probabilités totales en choisissant un SCE judicieux.*

3. On suppose les VAR X et Y indépendantes. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = 1$.

4. Inversement, on suppose que $\operatorname{rg}(A) = 1$. On note $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.

a. Montrer que les colonnes de A sont proportionnelles à la matrice C de **Q2_**.

b. A l'aide de **Q1_**, montrer que : $\forall j \in \ 1, n \ , \ C_j = C$.

c. **E**n déduire alors que les VAR X et Y sont indépendantes.

1. Soit $j \in \{1, ..., n\}$. $\mathbb{P}_{[Y=j]}$ est une mesure de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et $([X=i])_{1 \le i \le n}$ est un système complet d'événements, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{[Y=j]}(X=i) = 1$.

2. On a :

$$\Phi \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y=1) \\ \mathbb{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y=n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y=1) \\ \mathbb{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y=n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \mathbb{P}(Y=j) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \mathbb{P}(Y=j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \mathbb{P}(Y=j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[Y=j]}(X=1) \mathbb{P}(Y=j) \\ \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[Y=j]}(X=2) \mathbb{P}(Y=j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[Y=j]}(X=n) \mathbb{P}(Y=j) \end{pmatrix},$$

d'où, d'après la formule des probabilités totales : $\Phi \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y=1) \\ \mathbb{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y=n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X=1) \\ \mathbb{P}(X=2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X=n) \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X=1) \\ \mathbb{P}(X=2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X=n) \end{pmatrix}$ appartient donc à $\operatorname{Im} \Phi$.

3. Si l'on suppose X et Y indépendantes, on a pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, $a_{i,j} = \mathbb{P}(X=i)$: les colonnes de A sont toutes égales (et non nulles puisque la somme des coefficients de chacune d'entre elles vaut 1) ; on a donc $\operatorname{rg}(A) = 1$.

4.a. Le vecteur colonne $C = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = 1) \\ \mathbb{P}(X = 2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ appartient à $\operatorname{Im} \Phi$, est non nul et l'on a $\dim(\operatorname{Im} \Phi) = 1$, il en résulte que $\operatorname{Im} \Phi = \operatorname{Vect}(C)$. Or les colonnes de A sont dans $\operatorname{Im} \Phi$; par conséquent :

$$\forall\ j \in \{1, ..., n\},\ \exists\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ C_j = \lambda_j C :$$

Les colonnes de A sont toutes proportionnelles à C.

4.b. On a d'après **1.** pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$, d'après **4.a.** $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \lambda_j \sum_{i=1}^{n} c_i$, et l'on a $\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i) = 1$; par suite, $\lambda_j = 1$, et $C_j = C$.

4.c. D'après **4.b.** : $\forall\ j \in \{1, ..., n\} : \forall\ i \in \{1, ..., n\},\ a_{i,j} = c_i$, soit : $\mathbb{P}_{[Y = j]}(X = i) = \mathbb{P}(X = i)$.

Pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, la loi de X sachant $[Y = j]$ est la loi de X, ainsi les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 25

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = r \int_0^1 x^{n-1} (1 - x)^r \, dx.$$

2. Calculer l'espérance et la variance de X si elles existent.

1) On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n : \begin{pmatrix} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & rx^{n-1}(1-x)^r \end{pmatrix}$, et l'on a les résultats suivants :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue donc continue par morceaux sur $[0, 1[$.

(ii) La série de fonctions $\left(\sum u_n\right)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1[$ et a pour somme la fonction $f : x \mapsto r(1 - x)^{r-1}$.

(iii) La fonction f est continue donc continue par morceaux sur $[0, 1[$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$, donc est intégrable sur $[0, 1]$.

(v) Comme $r > 0$, on remarque que f est intégrable sur $[0, 1[$. Comme les u_n sont des fonctions positives, on en déduit la majoration pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 |u_k| = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 u_k = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \int_0^1 f$: la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général $\int_0^1 |u_n|$ est majorée, cette série est donc convergente.

On en déduit d'après le théorème d'intégration terme à terme que $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n = \int_0^1 f = 1$.

En résumé : les réels $\alpha_n = \int_0^1 u_n$ sont tous positifs, et la série $\left(\sum \alpha_n\right)_{n \geq 1}$ est convergente et a pour somme 1.

Il existe bien une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \alpha_n$.

2. Calcul de l'espérance :

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n : \left(\begin{array}{ll} [0,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto n r x^{n-1}(1-x)^r \end{array}\right.$, de sorte que $\int_0^1 v_n = n P(X = n)$.

On sait que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, donc la série de fonctions $\left(\sum v_n\right)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0,1[$ et a pour somme la fonction $g : x \mapsto r(1-x)^{r-2}$.

Premier cas : Si $r > 1$, alors g est intégrable sur $[0,1[$, et le même raisonnement qu'au (a) montre que la série de terme général $\int_0^1 v_n = n P(X = n)$ converge et a pour somme $\int_0^1 g = \frac{r}{r-1}$.

On en déduit alors que X admet une espérance et que $\mathrm{E}(X) = \frac{r}{r-1}$.

Second cas : Si $r \in [0,1[$, alors g n'est pas intégrable sur $[0,1[$.

On raisonne par l'absurde en supposant que la série de terme général $\int_0^1 v_n = n P(X = n)$ converge.

Alors on reprend le raisonnement du (a), sauf le (*v*) qui est ici admis. Le théorème d'intégration terme à terme montre alors g est intégrable sur $[0,1[$, ce qui est absurde : La série de terme général $n P(X = n)$ diverge, et X n'admet pas d'espérance.

Calcul de la variance :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n : \left(\begin{array}{ll} [0,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto n r x^{n-1}(1-x)^r \end{array}\right.$, de sorte que $\int_0^1 w_n = n^2 P(X = n)$. On sait que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1} = \frac{2x}{(1-x)^3}$,

puis $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

donc la série de fonctions $\left(\sum w_n\right)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0,1[$ et a pour somme la fonction

$h : x \mapsto r(1+x)(1-x)^{r-3}$.

Par le même raisonnement que pour l'espérance, on en déduit que X admet une variance si et seulement $r > 2$, et que dans ce cas on a :

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 r(1+x)(1-x)^{r-3}\,\mathrm{d}x = \left[-r(1+x)\frac{(1-x)^{r-2}}{r-2}\right]_0^1 + \frac{r}{r-2}\int_0^1 (1-x)^{r-2}\,\mathrm{d}x,$$

soit $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \dfrac{r}{r-2} + \dfrac{r}{(r-2)(r-1)} = \dfrac{r^2}{(r-2)(r-1)}$.

On en déduit que : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 = \dfrac{r^2}{(r-2)(r-1)} - \dfrac{r^2}{(r-1)^2} = \dfrac{r^2}{(r-2)(r-1)^2}$.

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère que toutes les permutations de $[\![1, n]\!]$ sont équiprobables, et l'on note T_n la variable aléatoire représentant le nombre de points fixes d'une permutation choisie au hasard.

Calculer l'espérance et la variance de T_n.

Notons, pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la variable aléatoire égale à 1 si i est un point fixe de la permutation σ choisie, et à 0 sinon. On a $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, d'où $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$ et

$\mathbb{V}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

Il est clair que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$; d'autre part, pour $i \ne j$, $\mathbb{P}\left(X_i X_j = 1\right) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1}$.

On en déduit : $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{n}$, $\mathbb{V}(X_i) = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^2}$, et pour $i \ne j$,

$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}\left(X_i X_j = 1\right) - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2}$.

Il en résulte que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} = 1$, et que $\mathbb{V}(T_n) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{n-1}{n^2} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Il existe $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$ tels que $1 \le i < j \le n$, on obtient donc :

$\mathbb{V}(T_n) = \dfrac{n(n-1)}{n^2} + 2\dfrac{n(n-1)}{2}\left(\dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n-1}{n} + 1 - \dfrac{n-1}{n} = 1$.

Exercice 28

On considère une pièce équilibrée. On considère un lancer infini de pièces. On note $T_{X,Y}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers nécessaires pour l'obtention de la séquence XY, avec $X, Y \in \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

Donner les lois et les espérances de $T_{P,P}$, $T_{F,F}$, $T_{P,F}$, $T_{F,P}$.

1^er^ cas : $xy = \mathrm{PP}$. On note $x_n = P\left(T_{\mathrm{PP}} = n\right)$. On a immédiatement $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$, et pour $n \ge 3$, $x_n = P\left(T_{PP} = n \middle| A\right)P(A) + P\left(T_{PP} = n \middle| B\right)P(B) + P\left(T_{PP} = n \middle| C\right)P(C)$ où A est l'évènement : « le premier tirage a donné F », B l'évènement : « les deux premiers tirages ont donné PF » et C l'évènement : « les deux premiers tirages ont donné PP ». Ce qui donne : $x_n = \dfrac{1}{2}x_{n-1}P(A) + \dfrac{1}{4}x_{n-2}$.

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'équation caractéristique : $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$, de racines $r_{1-2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

D'où l'existence de $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x_n=\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}+\mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$.

De $x_1=0$ on déduit $\lambda=-\mu$, puis de $x_2=\frac{1}{4}$, on déduit $\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)-\lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{1}{4}$, et donc $\lambda=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. En résumé : T_{PP} est à valeurs dans $\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$ (en notant « $T_{\text{PP}}=\infty$ » l'évènement : la séquence PP n'apparaît jamais »), et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(T_{\text{PP}}=n)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right)$.

On calcule alors $\sum_{n=1}^{+\infty}P(T_{\text{PP}}=n)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{4\left(3+\sqrt{5}-3+\sqrt{5}\right)}{4}\right)=1$.

Ce qui montre que l'évènement « $T_{\text{PP}}=\infty$ » est négligeable : T_{PP} est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Avec la formule : $\forall x\in\left]-1,1\right[,\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$, on déduit que T_{PP} admet une espérance qui vaut :

$$\mathrm{E}(T_{\text{PP}})=\sum_{n=1}^{+\infty}nP(T_{\text{PP}}=n)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{8\left(7+3\sqrt{5}-7+3\sqrt{5}\right)}{\left(7-3\sqrt{5}\right)\left(7+3\sqrt{5}\right)}\right),$$

$\mathrm{E}(T_{\text{PP}})=6$.

2$^{\text{ème}}$ cas : Il est clair que T_{FF} suit la même loi que T_{PP}.

3$^{\text{ème}}$ cas : $xy=\text{PF}$. L'évènement « $T_{\text{PF}}=n$ » se produit lors de la première apparition de face suivant la première apparition de pile. C'est-à-dire, si on note X le rang première apparition de pile (avec X- $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$) et Y le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la première apparition de face après cette première apparition de pile (avec Y- $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$), alors $T_{\text{PF}}=X+Y$. Ce qui montre que T_{PF} est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, que $P(T_{\text{PF}}=1)=0$, et que, pour tout $n\geq 2$,

$$P(T_{\text{PF}}=n)=\sum_{k=1}^{n-1}P(T_{\text{PF}}=n|X=k)P(X=k)=\sum_{k=1}^{n-1}P(Y=n-k)P(X=k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k}}\frac{1}{2^k}=\frac{n-1}{2^n}.$$

On en déduit aussi : $\mathrm{E}(T_{\text{PF}})=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=4$.

4$^{\text{ème}}$ cas : il est clair que T_{FP} suit la même loi que T_{PF}.

Exercice 29

Soit (X,Y) un couple de v.a.r.d. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$, telles que $X(\Omega)=\{x_i\ ,\ i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j\ ,\ j\in J\}$, I et J étant des parties infinies de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. On suppose que la v.a.r. Y admet une espérance, et que pour tout $i\in I$, $\mathbb{P}(X=x_i)\neq 0$.

1. Soit $i\in I$.

a. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y_i sur un espace probabilisé $\left(\Theta, \mathcal{A}, P\right)$ telle que $Y_i(\Theta) = Y(\Omega)$,

et : $\forall j \in J,\ P\left(Y_i = y_j\right) = \mathbb{P}\left(Y = y_j \ / \ X = x_i\right)$.

b. Montrer que la v.a.r. Y_i possède une espérance.

L'espérance de Y_i est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant $\left(X = x_i\right)$, et on la note $\mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right)$.

On considère une var. Z prenant les valeurs $\mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right)$, pour $i \in I$, avec la probabilité $p_i = \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$. La var. Z est appelée ***espérance conditionnelle*** de Y sachant X, et est notée $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)$.

2. Montrer que la v.a.r. $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)$ admet une espérance.

3. Prouver alors la ***formule de l'espérance totale*** : $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)\right) = \mathbb{E}(Y)$,

ie : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{E}_{(X = x_i)}(Y).\mathbb{P}\left(X = x_i\right)$.

4. ***Application***

Une urne contient $p+1$ boules numérotées de 0 à p. On considère l'expérience suivante :

- On choisit une boule au hasard dans l'urne, puis on l'y remet, mais on supprime toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à celui que l'on a tiré.
- On choisit ensuite une deuxième boule dans l'urne.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales respectivement au premier et au deuxième numéro tiré.

Déterminer l'espérance de X_2.

1. Sous réserve d'existence, $\mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right)$ désigne bien sûr l'espérance de la loi de Y conditionnellement à $\left(X = x_i\right)$, espérance qui est donnée par

$$\mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right) = \sum_{j \in J} y_j\, \mathbb{P}\left(Y = y_j \mid X = x_i\right) = \frac{1}{\mathbb{P}\left(X = x_i\right)} \sum_{j \in J} y_j\, \mathbb{P}\left(Y = y_j,\ X = x_i\right),$$

à condition que cette somme converge absolument.

Or pour tout $j \in J$, $\left|y_j\, \mathbb{P}\left(Y = y_j,\ X = x_i\right)\right| \leq \left|y_j\, \mathbb{P}\left(Y = y_j\right)\right|$, et, puisque Y admet une espérance, la somme $\sum_{j \in J} \left|y_j\, \mathbb{P}\left(Y = y_j\right)\right|$ converge.

Le critère de convergence par majoration pour les séries à terme général positif assure alors que la somme $\sum_{j \in J} \left|y_j\, \mathbb{P}\left(Y = y_j,\ X = x_i\right)\right|$ converge. Par suite, $\boxed{\mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right) \text{ existe}}$.

2. $\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)$ admet une espérance si et seulement si la somme $\sum_{i \in I} \mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right) \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$ converge absolument, et dans ce cas : $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y \mid X\right)\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right) \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$.

D'après ce qui précède, on a donc, sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y \mid X)\right) = \sum_{i \in I}\left(\frac{1}{\mathbb{P}\left(X = x_i\right)}\sum_{j \in J} y_j\,\mathbb{P}\left(Y = y_j\,,\ X = x_i\right)\right)\mathbb{P}\left(X = x_i\right)$$
$$= \sum_{i \in I}\sum_{j \in J} y_j\,\mathbb{P}\left(Y = y_j\,,\ X = x_i\right)\ .$$

L'idée est alors de permuter l'ordre de sommation :

- Un appel au système complet d'évènements associé à Y : $\left(X = x_i\right)_{i \in I}$ permet d'assurer que pour tout

$j \in J$, la somme $\sum_{i \in I} \mathbb{P}\left(Y = y_j\,,\ X = x_i\right)$ converge, et que :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}\left(Y = y_j\,,\ X = x_i\right) = \mathbb{P}\left(Y = y_j\right).$$

La convergence est bien sûr absolue (tous les termes sont ici positifs).

- • Comme Y possède une espérance, la somme $\sum_{j \in J} y_j\,\mathbb{P}\left(Y = y_j\right)$ converge absolument, et

$$\sum_{j \in J} y_j\,\mathbb{P}\left(Y = y_j\right) = \mathbb{E}(Y).$$

On sait alors que la somme $\sum_{j \in J}\sum_{i \in I} y_j\,\mathbb{P}\left(Y = y_j\,,\ X = x_i\right)$ existe, que

$\sum_{j \in J}\sum_{i \in I} y_j\,\mathbb{P}\left(Y = y_j\,,\ X = x_i\right) = \mathbb{E}(Y)$ et que l'on peut intervertir les ordres de sommation :

la somme $\sum_{i \in I}\sum_{j \in J} y_j\,\mathbb{P}\left(Y = y_j\,,\ X = x_i\right)$ existe elle aussi (convergence absolue), et vaut $\mathbb{E}(Y)$.

C'est dire que $\mathbb{E}(Y \mid X)$ possède une espérance, et que $\boxed{\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y \mid X)\right) = \mathbb{E}(Y)}$, d'où la formule de

l'espérance totale : $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}\left(Y \mid X = x_i\right)\mathbb{P}\left(X = x_i\right)}$.

Exercice 30

On considère une suite $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de VAR définies sur un même probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose ces VAR mutuellement indépendantes, et identiquement distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$. On note comme toujours $q = 1 - p$.

1.a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $Z_k = \left(\bigcap_{n \geq k}\left[X_n = 0\right]\right) \cup \left(\bigcap_{n \geq k}\left[X_n = 1\right]\right)$ est un événement.

b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k est négligeable. Interpréter ce résultat.

2. On considère la fonction $L : \Omega \to \mathbb{N}$ associant à toute éventualité appartenant à Z_1 la valeur 0, et à tout autre élément ω de Ω l'unique entier $n \geq 1$ tel que ω appartienne à $\left[X_n = X_{n-1} = \ldots = X_1\right] \cap \left[X_{n+1} \neq X_1\right]$.

a. Montrer que L est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

b. Quelle est la loi de L ?

c. Montrer que L admet un moment d'ordre 2.

d. En déduire que L admet une espérance et une variance (*à ne pas calculer*).

e. Calculer $\mathbb{E}\left(L\right)$.

1.a. Les X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, étant des variables aléatoires, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left[X_n = 0\right]$ et $\left[X_n = 1\right]$ sont des événements. Pour tout $k \geq 1$, $\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 0\right]$ et $\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 1\right]$ sont alors des évènements comme intersections au plus dénombrables d'événements ; enfin, $Z_k = \left(\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 0\right]\right) \cup \left(\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 1\right]\right)$ est un événement, comme réunion de deux événements.

1.b. On a $\mathbb{P}\left(Z_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 0\right]\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 1\right]\right)$ (en fait, il y a égalité, mais peu importe ici).

Or, d'après le théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 0\right]\right) = \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n = k}^{N} \left[X_n = 0\right]\right)$,

puis, par indépendance mutuelle des X_n, et du fait que ces variables aléatoires suivent toute la loi $\mathcal{B}\left(p\right)$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq k} \left[X_n = 0\right]\right) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{n = k}^{N} \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \lim_{N \to +\infty} p^{N - n + 1} = 0.$$

De même, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \geq k} \left[X_n = 1\right]\right) = 0$, et ainsi Z_k est négligeable.

Cela signifie que, pour tout k, il est quasi impossible que les vards X_n, $n \geq k$, prennent toutes la même valeur.

2.a. La fonction L est bien définie sur Ω, et elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On a $\left[L = 0\right] = Z_1$, qui est bien un événement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left[L = n\right] = \left(\bigcap\limits_{k = 2}^{n} \left[X_k = X_1\right]\right) \cap \overline{\left[X_{n+1} = X_1\right]}$ est bien un événement, car $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire, et par intersection finie ou dénombrable.

Ainsi, L est une variable aléatoire.

Rermarque L représente la longueur de la première séquence de résultats de même type (succès ou échecs).

b. On l'a dit, $L\left(\Omega\right) = \mathbb{N}$. On a $\mathbb{P}\left(L = 0\right) = \mathbb{P}\left(Z_1\right)$, donc d'après **1.b.**, $\mathbb{P}\left(L = 0\right) = 0$. Pour $n \geq 1$:

$\mathbb{P}\left(L = k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k = 2}^{n} \left[X_k = X_1\right]\right) \cap \overline{\left[X_{n+1} = X_1\right]}\right)$, d'où

$$\mathbb{P}(L=k)=\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=1]\right)\cap[X_{n+1}=0]\right)+\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=0]\right)\cap[X_{n+1}=1]\right)$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k=1)\right)\mathbb{P}(X_{n+1}=0)+\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k=0)\right)\mathbb{P}(X_{n+1}=1)$$

$$=p^n q+q^n p\,.$$

c.d.e. Les séries $\sum n^2 p^n q$ et $\sum n^2 q^n p$ convergent absolument (par exemple via la règle de d'Alembert), donc L admet un moment d'ordre 2. On sait alors que L possède une variance, et une espérance.

On a $\mathbb{E}(L)=pq\sum_{n=1}^{+\infty}\left(np^{n-1}+nq^{n-1}\right)$, et l'on reconnaît deux séries géométriques dérivées :

$$\mathbb{E}(L)=pq\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\,.$$

Exercice 33

1. Montrer que tout entier $n\in\mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $n=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k 2^k$ où $\forall k\in\mathbb{N},\varepsilon_k\in\{0,1\}$.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, P(X=n)=\frac{1}{2^{n+1}}$.

On définit, pour $k\in\mathbb{N}$, les variables de Bernoulli X_n par la relation : $X=\sum_{k=0}^{+\infty}2^k X_k$.

Déterminer $\mathrm{E}(X_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

1. Montrons ce résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. Pour $n=0$ c'est immédiat avec $\forall k\in\mathbb{N},\varepsilon_k=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on suppose que le résultat est vrai pour tout entier $k<n$.

Analyse : pose $n=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k 2^k$. Alors ε_k est nul à partir d'un certain rang (sinon la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k 2^k$ serait grossièrement divergente, et les ε_k ne sont pas tous nuls (puisque $n\neq 0$). On peut donc définir $p=\max\{k\in\mathbb{N}\,/\,\varepsilon_k=1\}$, de sorte que $n=2^p+\sum_{k=0}^{p-1}\varepsilon_k 2^k$, ce qui montre que $2^p\le n\le\sum_{k=0}^{p}2^k=2^{p+1}-1$, et donc $p=\left\lfloor\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right\rfloor$: ceci montre l'unicité d'un tel p. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $n'=n-2^p$, n' s'écrit de façon unique sous la forme $n'=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon_k 2^k$, et, comme $n<2^{p+1}$, on a $n'<2^p$, et donc, pour tout $k\ge p$, $\varepsilon_k=0$. On peut alors écrire : $n'=\sum_{k=0}^{p-1}\varepsilon_k 2^k$. On en déduit que l'écriture unique de n sous la forme voulue est : $n=\sum_{k=0}^{p-1}\varepsilon_k 2^k+2^p$.

Synthèse : Il est clair que cette écriture convient. Ce qui achève la preuve.

Remarque : on reconnaît dans ce (a) la démonstration de l'unicité de l'écriture d'un entier naturel en binaire.

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\varepsilon_k(n)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ l'unique suite à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que $n = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(n) 2^k$.

On a alors $X_k = \varepsilon_k(X)$, et, avec le théorème de transfert :

$$E\left(X_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_k(n) P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k(n)}{2^{n+1}}.$$

Ce qu'on peut aussi écrire : $\mathrm{E}\left(X_k\right) = P\left(X_k = 1\right) = P\left(\bigcup_{n \in A_k} P(X = n)\right)$ où

$A_k = \left\{n \in \mathbb{N} \,/\, \varepsilon_k(n) = 1\right\}$.

Cherchons les $n \in \mathbb{N}$ tels que $\varepsilon_k(n) = 1$. Ce sont ceux qui s'écrivent :

$n = \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j 2^j + 2^k + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_j 2^j = \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j 2^j + 2^k + 2^{k+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_{j-k-1} 2^j$, c'est-à-dire les nombre de la forme $a + 2^k + 2^{k+1} b$ où $a \in [\![0, 2^k - 1]\!]$ et $b \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire : $A_k = \bigcup_{a=0}^{2^k-1} \bigcup_{b \in \mathbb{N}} \left\{a + 2^k + 2^{k+1} b\right\}$, et donc (puisque d'après l'unicité montrée au (a) ces évènements sont bien deux à deux disjoints)

$$\mathrm{E}\left(X_k\right) = \sum_{a=0}^{2^k-1} \sum_{b=0}^{+\infty} P\left(X = a + 2^k(1 + 2b)\right) = \sum_{a=0}^{2^k-1} \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{a + 2^k(1+2b)+1}} = \sum_{a=0}^{2^k-1} \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{a+1} 2^{2^k} 2^{2^{p+1} b}},$$

Ce qui donne : $\mathrm{E}\left(X_k\right) = \dfrac{1}{2^{2^k}} \left(\sum_{a=0}^{2^k-1} \dfrac{1}{2^{a+1}}\right)\left(\sum_{b=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2^{k+1} b}}\right)$.

On a : $\sum_{a=0}^{2^k-1} \dfrac{1}{2^{a+1}} = 1 - \dfrac{1}{2^{2^k}} = \dfrac{2^{2^k} - 1}{2^{2^k}}$ et $\sum_{b=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2^{k+1} b}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2^{2^{k+1}}}} = \dfrac{2^{2^{k+1}}}{2^{2^{k+1}} - 1}$.

Ce qui donne finalement : $\mathrm{E}\left(X_k\right) = \dfrac{2^{2^{k+1}}}{2^{2^k} 2^{2^k}} \dfrac{2^{2^k} - 1}{2^{2^{k+1}} - 1} = \dfrac{1}{1 + 2^{2^k}}$.

<u>Remarque</u> : On peut aussi faire le raisonnement suivant : Si on note $A = \left\{n \in \mathbb{N} \,/\, \varepsilon_k(n) = 1\right\}$, il est immédiat que l'application $n \mapsto n - 2^k$ réalise une bijection de A sur $\overline{A}$. Donc :

$P\left(X_k = 1\right) = \sum_{n \in A} P(X = n) = \sum_{n \in A} \dfrac{1}{2^n}$, et

$$P\left(X_k = 0\right) = \sum_{n \in \overline{A}} P(X = n) = \sum_{n \in \overline{A}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^{n - 2^k}} = 2^{2^k} \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n} = 2^{2^k} P\left(X_k = 1\right).$$

D'où $1 = P\left(X_k = 1\right) + P\left(X_k = 0\right) = \left(1 + 2^{2^k}\right) P\left(X_k = 1\right)$.

On retrouve bien : $\mathrm{E}\left(X_k\right) = \dfrac{1}{1 + 2^{2^k}}$.

Exercice 40

Variance et antirépartition

Soit X une v.a.r. définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(X>k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2}.\mathbb{P}(X=i) + \frac{n(n+1)}{2}\mathbb{P}(X>n)$.

2. En déduire que la v.a.r. $\dfrac{X(X-1)}{2}$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k.\mathbb{P}(X>k)$ converge, et que lorsque cette condition est réalisée, on a : $\mathbb{E}\left(\dfrac{X(X-1)}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k.\mathbb{P}(X>k)$.

3. Montrer que, toujours lorsque la condition précédente est réalisée : $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1).\mathbb{P}(X>k)$.

4. Que vaut alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de l'anti – répartition ?

Corrigé (début)

1. Pour tout $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k.\mathbb{P}(X>k) &= \sum_{k=0}^{n} k.\sum_{i=k+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k.\left(\sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}(X=i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k.\left(\sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}(X=i) + \mathbb{P}(X>n)\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} k.\left(\sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}(X=i)\right)\right) + \mathbb{P}(X>n)\sum_{k=0}^{n} k\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=i).\left(\sum_{k=0}^{i-1} k\right)\right) + \frac{n(n+1)}{2}\mathbb{P}(X>n)\\
&= \boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{2}\mathbb{P}(X=i)\right) + \frac{n(n+1)}{2}\mathbb{P}(X>n)}.
\end{aligned}$$

2. D'après le théorème de transfert, $\dfrac{X(X-1)}{2}$ admet une espérance si et seulement si la série

$\displaystyle\sum \frac{i(i-1)}{2}\mathbb{P}(X=i)$ converge, et lorsque tel est le cas, $\mathbb{E}\left(\dfrac{X(X-1)}{2}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i(i-1)}{2}\mathbb{P}(X=i)$

Exercice 41

Déterminer la loi d'un minimum de n variables aléatoires indépendantes et toutes de même loi $\mathcal{G}(p)$.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes et toutes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$.

Soit la variable aléatoire $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$. On note $q = 1 - p$.

Les X_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, m est donc également à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(m>k) = \mathbb{P}\left(\min(X_1,\ldots,X_n)>k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i>k)\right).$$

Alors par indépendance des X_i :

$\mathbb{P}(m > k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > k)$, donc puisque les X_i suivent toutes la même loi, $\mathbb{P}(m > k) = \left(\mathbb{P}(X_1 > k)\right)^n$.

Or $\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} p q^{j-1} = \dfrac{p q^k}{1-q} = q^k$.

Donc $\mathbb{P}(m > k) = q^{nk}$, et il en résulte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(m = k) &= \mathbb{P}(m > k-1) - \mathbb{P}(m > k) = q^{n(k-1)} - q^{nk}\\ &= q^{n(k-1)}\left(1 - q^n\right):\end{aligned}$$

On remarque que m suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^n$.

Exercice 51

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que X et $\dfrac{1}{X}$ admettent une espérance finie.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geq \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

2. Étudier le cas d'égalité.

1) On a : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)n$, $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)\dfrac{1}{n}$ (d'après le théorème de transfert), et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $1 = E(1)^2 = E\left(\sqrt{X}\dfrac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \leq E(X)E\left(\dfrac{1}{X}\right)$, d'où le résultat.

2) Rappelons la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz faite en cours :

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une variance. Alors XY admet une espérance et $\mathrm{E}(XY)^2 \leq \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2)$.

Pve : De $|XY| \leq \dfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)$, on déduit que XY admet bien une espérance. On note alors $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{E}(X^2) + 2t\,\mathrm{E}(XY) + t^2\,\mathrm{E}(Y^2)$. La linéarité de l'espérance montre que $\varphi(t) = \mathrm{E}\left((X + tY)^2\right)$, ce qui montre que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \geq 0$ (puisque $(X + tY)^2$ étant une variable aléatoire positive, son espérance est positive). Si $E(Y^2) \neq 0$, φ est une fonction polynomiale du second degré, son discriminant est donc négatif : $4\mathrm{E}(XY)^2 - 4\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2) \leq 0$, d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (Si $E(Y^2) = 0$, le fait que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{E}(X^2) + 2t\,\mathrm{E}(XY) \geq 0$ suffit à montrer que $E(XY) = 0$, ce qui établit encore l'inégalité $\mathrm{E}(XY)^2 \leq \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2)$ dans ce cas particulier.)
De ce raisonnement on déduit que s'il y a égalité et que $E(Y^2) \neq 0$, alors le discriminant de φ est nul, ce qui montre qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(X + tY)^2$ est une variable aléatoire d'espérance nulle, ce qui suffit à montrer que $P(X + tY = 0) = 1$.
On applique ce résultat à $\sqrt{X}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$: il existe alors $\lambda = -t \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = \lambda) = 1$, ce qui montre que $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et que X est presque sûrement égal à λ.
Réciproquement il est clair qu'une telle variable aléatoire convient.