PC LAKANAL DM4 - VERSION HARD - CENTRALE PC - 2022
CORRIGÉ

I. Étude de deux familles de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts.
Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on note L_i le polynôme de degré $n-1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}. \tag{I.1}$$

On dit que $L_1, \dots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$.

I.A - Polynômes de Lagrange

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array} \right.$$

Q1. Pour tous polynômes P et Q, $\langle P, Q\rangle$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}$.

On a immédiatement la symétrie, la linéarité par rapport à la première variable et donc par rapport à la seconde via la symétrie.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $\langle P, P\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k)^2 \geqslant 0$ comme somme de termes positifs.
Si $\langle P, P\rangle = 0$, chaque terme de la somme est nul donc $P(a_k) = 0\ \forall k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi P a au moins n racines distinctes, or il est de degré $\leqslant n-1$ donc c'est le polynôme nul. La défini-positivité est vérifiée.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q2. Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$. Si $k \neq i$ alors $(X - a_k)$ apparaît dans le produit définissant L_i et donc $L_i(a_k) = 0$.

Pour $k = i$ on a $L_i(a_i) = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$.

Ainsi dans tous les cas $L_i(a_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q3. Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors

$$\langle L_i, P\rangle = \sum_{k=1}^{n} L_i(a_k)P(a_k) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}P(a_k) = P(a_i).$$

Q4. En particulier pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a $\langle L_i, L_j\rangle = L_j(a_i) = \delta_{ij}$ donc la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est orthonormée. Elle est en particulier libre et son cardinal valant $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q5. Cette base étant orthonormée, tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ se décompose dans cette base sous la forme

$$P = \sum_{i=1}^{n} \langle P, L_i \rangle \, L_i = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

Q6. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, le polynôme L_i est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$

donc le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme $\sum\limits_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$ est donné par

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)}.$$

Si P est de degré $\leqslant n-2$, ce coefficient est nul, d'où l'égalité demandée.

I.B - Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p.$$

Q7. Soit $x \in \mathbb{R}$, par formule du binôme on a $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. En particulier en faisant la moyenne des relations pour $x = 1$ et $x = -1$ on obtient

$$\frac{1}{2}(2^n + 0^n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1 + (-1)^k}{2}$$

Le coefficient $\dfrac{1 + (-1)^k}{2}$ vaut 1 si k est pair et 0 si k est impair, il reste donc

$$2^{n-1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

Q8. Pour tout $p \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, le polynôme $X^{n-2p}(1 - X^2)^p$ est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^p$. On en déduit que $\deg(T_n) \leqslant n$, et que le coefficient de X^n est donné par

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} (-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}$$

donc T_n est bien de degré n, et son coefficient dominant vaut 2^{n-1}.

Q9. On souhaite montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Notons d'abord que si P et Q sont deux polynômes vérifiant cette relation, on a $P(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et donc $(P - Q)(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Le polynôme $P - Q$ ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul d'où $P = Q$, ce qui prouve l'unicité.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a par formule de (de) Moivre

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \, \sin^k(\theta)$$

Le terme d'indice k dans cette somme est réel si k est pair, imaginaire pur si k est impair donc en prenant la partie réelle on obtient

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \, \sin^k(\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \cos^{n-2p}(\theta)\, i^{2p} \, \sin^{2p}(\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \cos^{n-2p}(\theta)\, (1-\cos^2(\theta))^p$$

et donc en identifiant les parties réelles on obtient $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$.

Q10. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Remarquons que les nombres $\theta_{k,n} = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ sont distincts et appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction cos étant strictement décroissante cette intervalle, on en déduit que les nombres $y_{k,n} = \cos(\theta_{k,n})$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont tous distincts.

Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $T_n(y_{k,n}) = \cos(n\theta_{n,k}) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi $y_{k,n}$ est une racine de T_n.

On a ainsi trouvé n racines distinctes de T_n qui est de degré n, on a donc obtenu toutes les racines et elles sont simples. Le coefficient dominant de T_n valant 2^{n-1}, on obtient la factorisation

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - y_{k,n})$$

I.C - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et W un polynôme unitaire de degré n. L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \tag{I.2}$$

puis d'étudier dans quel cas il y a égalité.

Q11. La fonction cos étant bijective de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$, on a

$$\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta \in [0,\pi]} |T_n(\cos\theta)| = \sup_{\theta \in [0,\pi]} |\cos(n\theta)| = 1$$

On en déduit que le polynôme $U_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$, qui est unitaire, vérifie

$$\sup_{x \in [-1,1]} |U_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}},$$

qui est la borne recherchée.

On pose $Q = \frac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Q12. On a $Q = U_n - W$. Les deux polynômes U_n et W étant de degré n et unitaires, leurs termes en X^n se compensent et $\deg(Q) \leqslant n - 1$.

Q13. Supposons par l'absurde que $\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$, alors en particulier on a $-\frac{1}{2^{n-1}} < W(z_k) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Par ailleurs $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(z_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(k\pi) = \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}$.

On en déduit que si k est pair, $Q(z_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) > 0$, et si k est impair, $Q(z_k) = -\dfrac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) < 0$. Ainsi pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(z_k)$ et $Q(z_{k+1})$ sont de signe contraire et donc $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$.

Remarquons que la fonction cos étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a

$$-1 = z_n < \cdots < z_{k+1} < z_k < \cdots < z_0 = 1.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. La fonction polynomiale Q étant continue sur $[z_{k+1}, z_k]$, et $Q(z_k)$ et $Q(z_{k+1})$ étant non nuls et de signe contraire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_k \in]z_{k+1}, z_k[$ tel que $Q(c_k) = 0$. On a ainsi trouvé n racines distinctes pour le polynôme Q, ce qui est absurde pusique $\deg(Q) \leqslant n-1$.

Ainsi on a montré par l'absurde que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

On suppose maintenant que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Q14. Le même raisonnement montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $Q(z_k) \geqslant 0$ si k est pair et $Q(z_k) \leqslant 0$ si k est impair.

Par stricte décroissance de la famille des z_k, le produit $\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)$ contient k facteurs strictement négatifs et $n-k$ strictement positifs, et a donc le même signe que $(-1)^k$, et donc que $Q(z_k)$. On en déduit que

$$\frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)} \geqslant 0.$$

Q15. Or la question 6, adaptée en travaillant dans $\mathbb{R}_n[X]$ et les $n+1$ points d'interpolation $z_n, \ldots, z_0$,permet d'affirmer que, pusique le polynôme Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(z_k - z_j)} = 0$$

Chaque terme de cette somme étant $\geqslant 0$, cela signifie que chaque terme est nul et donc que $Q(z_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Cela donne $n+1$ racines distinctes pour Q de degré $\leqslant n-1$, donc Q est le polynôme nul.

On obtient finalement que $W = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$: le polynôme U_n est le seul polynôme unitaire pour lequel (I.2) est une égalité.

II. Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

II.A - Interpolation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Q16. Considérons d'abord une fonction s de classe C^1 sur I s'annulant en $p+1$ points $c_0 < c_1 < \ldots < c_p$ sur I pour un certain $p \geqslant 1$. Soit $j \in [\![0, p-1]\!]$, alors s est continue et dérivable sur $[c_j, c_{j+1}]$ et $s(c_j) = 0 = s(c_{j+1})$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $d_j \in]c_j, c_{j+1}[$ tel que $s'(d_j) = 0$. On a ainsi p réels distincts $d_0 < \ldots < d_{p-1}$ en lesquels s' s'annule.

Soit r une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Alors par récurrence finie en utilisant ce qui précède, on montre que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction $r^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points distincts de I.

En particulier pour $k = n$, il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.

Q17. Soit f une fonction à valeurs réelles de $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $P = \Pi(f)$ le polynôme interpolateur de f associé aux réels $a_1, \ldots, a_n$ comme défini en (II.1) ci-dessus. Soit $x \in I$ fixé.

Supposons que x soit distinct de tous les a_i et considérons la fonction r définie sur I par $r : t \mapsto f(t) - P(t) - K\,W(t)$ pour une certaine constante K. Cette fonction est de classe C^n car f l'est et les fonctions P et W sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarquons que $W(x) \neq 0$ donc en choisissant $K = \dfrac{f(x) - P(x)}{W(x)}$ on obtient que $r(x) = 0$. Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $f(a_i) = P(a_i)$ et $W(a_i) = 0$ donc $r(a_i) = 0$. Ainsi la fonction r s'annule en $n+1$ points distincts de l'intervalle I (x et chacun des a_i) donc d'après la question précédente il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.

Or P est polynomiale de degré $\leqslant n-1$ donc $P^{(n)} = 0$ et W est polynomiale de degré n et unitaire donc $W^{(n)} = n!$. Ainsi $r^{(n)} = f^{(n)} - K\,n!$ donc en évaluant en c on obtient $f^{(n)}(c) - K\,n! = r^{(n)}(c) = 0$ donc $K = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$. Par construction $K = \dfrac{f(x) - P(x)}{W(x)}$ donc on a bien trouvé $c \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,W(x).$$

Supposons maintenant que x soit l'un des a_i, alors $f(a_i) - P(a_i) = 0 = W(a_i)$ donc n'importe quel $c \in I$ vérifiera la relation

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,W(x).$$

Q18. Posons $M_n = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$ qui est bien défini car $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc bornée, alors pour tout $x \in I$, il existe $c \in I$ tel que

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}\,|W(x)| \leqslant \frac{M_n}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - a_i| \leqslant \frac{M_n}{n!}\,(b-a)^n$$

car pour tout i on a $(x, a_i) \in [a, b]^2$ donc $|x - a_i| \leqslant (b - a)$.

Ainsi la fonction $|f - P|$ est majorée sur I par $\dfrac{M_n}{n!}\,(b-a)^n$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on obtient

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_n\,(b-a)^n}{n!}.$$

II.B - Suites de polynômes interpolateurs

II.B.1) Convergence uniforme vers la fonction exponentielle

Dans cette section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et f est la restriction à I de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \exp(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme défini par (II.2).

Q19. Dans le cas de la fonction exponentielle, on a pour tout n, $f^{(n)} = \exp$ donc $M_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} e^x = e^b$. On obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leqslant e^b \, \frac{(b-a)^n}{n!}$$

qui tend vers 0 par croissances comparées, donc par théorème des gendarmes on a $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur I.

Q20. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ étant de rayon de convergence infini, elle converge uniformément vers sa somme (qui est l'exponentielle) sur tout segment de $\mathbb{R}$. Ainsi la suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur I.

Soit $n \geqslant 1$ fixé, on a $Q_n(0) = 1 = f(0)$ mais justifions que $Q_n(x) \neq f(x)$ pour $x \neq 0$. Si $x > 0$ on a directement $f(x) - Q_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$. Pour $x < 0$ c'est moins immédiat, on peut passer par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) - Q_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1} \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t$$

La dernière intégrale est strictement positive car on intègre sur $[x, 0]$ une fonction continue positive et non identiquement nulle. Ainsi $Q_n(x) \neq f(x)$.

On a bien construit une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers f sur I et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction Q_n ne coïncide avec f en aucun point de I, sauf peut-être en zéro.

II.B.2) Convergence uniforme vers une fonction rationnelle

Dans cette section, a est un réel strictement positif et $I = [-a, a]$. Soit

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

Q21. La fonction f est rationnelle donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur k la propriété

$$\mathcal{P}_k : \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f^{(k)}(\tan t) = k!\, \cos^{k+1}(t)\, \cos\left((k+1)t + \frac{k\pi}{2}\right)$$

Soit $t \in J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $f(\tan t) = \dfrac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t = 0!\, \cos(t)\, \cos(t)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain k, alors en dérivant la relation on obtient pour tout $t \in J$, en notant $\varphi(t) = (k+1)t + \dfrac{k\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 t} f^{(k+1)}(\tan t) &= k!\big((k+1)(-\sin(t))\cos^k(t)\cos(\varphi(t)) - \cos^{k+1}(t)(k+1)\sin((\varphi(t)))\big) \\
&= -(k+1)!\cos^k(t)\left(\sin(t)\cos(\varphi(t)) + \cos(t)\sin(\varphi(t))\right) \\
&= -(k+1)!\cos^k(t)\sin(\varphi(t)+t) \\
&= (k+1)!\cos^k(t)\cos\Big(\varphi(t)+t+\frac{\pi}{2}\Big)
\end{aligned}$$

et ainsi, pour tout $t \in J$,

$$f^{(k+1)}(\tan t) = (k+1)!\cos^{k+2}(t)\cos\left((k+2)t + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

ce qui montre $\mathcal{P}_{k+1}$.

Par principe de récurrence, l'expression est justifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de f sur I défini par (II.2).

Q22. La fonction tan réalisant une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f^{(k)}(x)| \leqslant (k+1)!$.

Soit $a < \dfrac{1}{2}$, sur l'intervalle $[-a, a]$ on a pour tout n, $M_n \leqslant (n+1)!$ donc

$$\sup_{x\in[-a,a]} |f(x) - P_n(x)| \leqslant (n+1)!\,\frac{(2a)^n}{n!} = (n+1)(2a)^n$$

Puisque $2a < 1$ on a par croissances comparées $(n+1)(2a)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc à nouveau la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$

II.B.3) Cas de la somme d'une série entière

Soit $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose,

$$\forall x \in\,]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad \text{et} \quad \forall x \in\,]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Q23. On a pour tout $x \in\,]-1, 1[$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ donc g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et on montre par une récurrence très simple que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in\,]-1, 1[, \qquad g^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

Q24. Par définition $R = \sup\{r \geqslant 0 \,/\, (c_k r^k) \text{ est bornée}\}$ donc pour $r \in\,]0, R[$, la suite $(c_k r^k)$ est bornée et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |c_k| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

Q25. Par dérivation d'une série entière on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in\,]-R, R[, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} c_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} \qquad \forall x \in\,]-1, 1[, \quad g^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$$

et donc, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k| \frac{k!}{(k-n)!} |x|^{k-n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{C}{r^k} \frac{k!}{(k-n)!} |x|^{k-n} \leqslant \frac{C}{r^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{k-n} = \frac{C}{r^n} g^{(n)}\left(\frac{|x|}{r}\right)$$

et donc d'après l'expression obtenue en **Q23**, on a

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{C}{r^n} \frac{n!}{\left(1 - \dfrac{|x|}{r}\right)^{n+1}} = \frac{n!\, r\, C}{(r - |x|)^{n+1}}.$$

Q26. On suppose que $a < R/3$ et on considère $r \in]a, R[$ que nous choisirons plus tard. D'après ce qui précède on a pour tout n

$$M_n = \sup_{x \in [-a,a]} |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, r\, C}{(r-a)^{n+1}}$$

et donc d'après **Q18** on a

$$\forall x \in [-a, a], \quad |f_n(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{n!\, r\, C}{(r-a)^{n+1}} \frac{(2a)^n}{n!} = \frac{rC}{r-a} \left(\frac{2a}{r-a}\right)^n$$

On va donc choisir r tel que $\dfrac{2a}{r-a} < 1 \Leftrightarrow r > 3a$, par exemple $r = \dfrac{3a+R}{2}$. On obtient alors

$$\sup_{x \in [-a,a]} |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{rC}{r-a} \left(\frac{2a}{r-a}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc une fois encore la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$

II.B.4) Interpolation aux points de Tchebychev

Cette section reprend l'étude des deux sections précédentes dans le cas de points d'interpolation particuliers, liés aux racines des polynômes de Tchebychev. On considère $a > 0$ et $I = [-a, a]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points de Tchebychev d'ordre n dans I sont :

$$a^*_{k,n} = a \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!].$$

On pose $W^*_n(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - a^*_{k,n})$.

Si f est une fonction définie sur I et si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit comme au (II.2) le polynôme interpolateur $P^*_n = \Pi^*_n(f)$ de f aux points de Tchebychev d'ordre n.

Q27. Pour tout $x \in [-a, a]$, on a

$$W^*_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a y_{k,n}) = a^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{a} - y_{k,n}\right) = a^n \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\frac{x}{a}\right)$$

avec $\dfrac{x}{a} \in [-1, 1]$ et donc $|W^*_n(x)| \leqslant \dfrac{a^n}{2^{n-1}} = 2\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$.

Q28. On adapte le raisonnement de **Q17** mais en améliorant la majoration de $|W(x)|$:

$$\forall x \in [-a, a],\ |f(x) - P^*_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{n!} |W^*_n(x)| \leqslant \frac{2\, M_n}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

Dans le cas où f est donnée par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a vu que $M_n \leqslant (n+1)!$ donc

$$\forall x \in [-a,a],\ |f(x) - P_n^*(x)| \leqslant 2(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

et donc si $a < 2$, ce majorant tend vers 0 par croissances comparées et la suite $(P_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\Pi_n^*(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Q29. On reprend dans cette question la fonction f somme de série entière étudiée dans la section II.B.3. On considère cette fois $a < \dfrac{2R}{3}$ et à nouveau $r \in]a,R[$ (ce qui définit la constante C). En reprenant la majoration de M_n obtenue en **Q26** et celle de $|W_n^*(x)|$ obtenue en **Q27**, on obtient :

$$\forall x \in [-a,a], \quad |f(x) - P_n^*(x)| \leqslant \frac{n!\, r\, C}{(r-a)^{n+1}} \, \frac{2}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n = \frac{2r\, C}{r-a}\left(\frac{a}{2(r-a)}\right)^n$$

On aura donc prouvé la convergence uniforme si l'on peut choisir $r < R$ tel que $\dfrac{a}{2(r-a)} < 1 \iff r > \dfrac{3}{2}a$. Puisque l'on a bien $\dfrac{3}{2}a < R$, on peut par exemple poser $r = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}a + R\right)$ et ainsi conclure sur la convergence uniforme de la suite $(\Pi_n^*(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $[-a,a]$.

III. Phénomène de Runge

III.A - Étude d'une intégrale généralisée

Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$.

Q30. La fonction $k : t \mapsto \dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle sans pôle réel) et pour tout t on a $k(t) = \dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^2+t^2} - 1$ donc k est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est de plus strictement positive sur $[0,1[$, donc par composition la fonction $h_\alpha = \ln \circ k$ est continue et décroissante sur $[0,1[$.

Pour tout $t \in [0,1[$ on a $h(t) = \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2+t^2)$. Les deux derniers termes définissent une fonciton continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable. Par le changement de variable décroissant $u = 1-t$ on a $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u$ et ln est intégrable sur $]0,1]$ donc $t \mapsto \ln(1-t)$ est intégrable sur $[0,1[$ et ainsi h_α est intégrable sur $[0,1[$.

On pose $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

Q31. En utilisant la décomposition précédente de h_α on obtient que

$$\begin{aligned}
J_\alpha &= \int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^2 \ln(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

en réutilisant le changement de variable $u = 1-t$ dans la première intégrale, et $v = 1+t$ dans la deuxième.

Q32. Une primitive de ln étant $u \mapsto u\ln(u) - u$, on obtient

$$\int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u = 2\ln(2) - 2 - \lim_{u\to 0}(u\ln(u) - u) = 2\ln(2) - 2$$

On utilise une intégration par partie pour la seconde intégrale, avec $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(\alpha^2 + t^2)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t &= \left[t\,\ln(\alpha^2+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 t\,\frac{2t}{\alpha^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(1+\alpha^2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\left[\alpha\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^1 \\
&= \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha\arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

et finalement $J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Q33. La fonction $J : \alpha \mapsto J_\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $J_\alpha \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 2\ln(2)$ car $\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc J est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ en posant $J(0) = 2\ln(2) > 0$. Par continuité en 0, il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in \,]0,\gamma[$, $J_\alpha > 0$.

III.B - Application à une somme de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0,1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, par $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n}\left(h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + h_\alpha\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right).$$

Q34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a par décroissance de h_α :

$$\forall t \in \left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right], \quad h_\alpha\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant h_\alpha(t) \leqslant h_\alpha\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$h_\alpha\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant \int_{(2k-1)/(2n)}^{(2k+1)/(2n)} h_\alpha(t) \leqslant h_\alpha\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$$

et donc

$$\int_{(2k+1)/(2n)}^{(2k+3)/(2n)} h_\alpha(t) \leqslant h_\alpha\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant \int_{(2k-1)/(2n)}^{(2k+1)/(2n)} h_\alpha(t)$$

la première inégalité étant valable pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ et la seconde pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Par sommation on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-2}\int_{(2k+1)/(2n)}^{(2k+3)/(2n)} h_\alpha(t) + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{(2k-1)/(2n)}^{(2k+1)/(2n)} h_\alpha(t)$$

et donc, par relation de Chasles,

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant S_n(h_\alpha) \leqslant \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q35. Lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = J_\alpha.$$

Par ailleurs $h_\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow h_\alpha(0) = 0$ donc $\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) \longrightarrow 0$. Enfin, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) &= \frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{1}{2n}\right) + \ln\left(2-\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(\alpha^2+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2\right)\right)\\
&= -\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}\left[-\ln(2) + \ln\left(2-\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(\alpha^2+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Le terme entre crochets est borné et le premier terme tend vers 0 par croissances comparées donc $\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \longrightarrow 0$.

Finalement, chaque membre de l'encadrement de **Q34.** tend vers J_α donc par théorème des gendarmes la suite $(S_n(h_\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers J_α.

Q36. Or pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1-a_{n,k}^2}{\alpha^2+a_{n,k}^2}\right) = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-a_{n,k}^2}{\alpha^2+a_{n,k}^2}$$

et donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-a_{n,k}^2}{\alpha^2+a_{n,k}^2} = \exp(n\,S_n(h_\alpha))$. Pour $\alpha \in]0,\gamma[$ on a $J_\alpha > 0$ donc $n\,S_n(h_\alpha)$ tend vers $+\infty$ et finalement la suite $\displaystyle\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (qui est positive) diverge vers $+\infty$.

III.C - Le phénomène de Runge

Dans cette sous-partie $I = [-1,1]$ et $\alpha > 0$. On considère

$$f_\alpha : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\alpha^2+x^2}\end{array}\right.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ le polynôme interpolateur de f_α aux $2n$ réels $\{\pm a_{k,n} \in I \mid k \in [\![0,n-1]\!]\}$.

On pose $Q_n(X) = 1-(X^2+\alpha^2)R_n(X)$.

Q37. Considérons le polynôme $S_n(X) = R_n(-X)$. La fonction f_α étant paire, on a pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$: $S_n(a_{k,n}) = R_n(-a_{k,n}) = f_\alpha(-a_{k,n}) = f_\alpha(a_{k,n})$ et de même $S_n(-a_{k,n}) = f_\alpha(-a_{k,n})$ donc S_n, qui est du même degré que R_n, vérifie les mêmes conditions d'interpolation. Par unicité du polynôme interpolateur, on a $S_n = R_n$ et donc R_n est un polynôme pair.

Par ailleurs on a $Q_n(\alpha\mathrm{i}) = 1-((\alpha\mathrm{i})^2+\alpha^2)R_n(\alpha\mathrm{i}) = 1$.

Q38. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ on a

$$Q_n(a_{n,k}) = 1-(a_{n,k}^2+\alpha^2)R_n(a_{n,k}) = 1-(a_{n,k}^2+\alpha^2)f_\alpha(a_{n,k}) = 1-1 = 0$$

et de même $Q_n(-a_{n,k}) = 0$, on a donc obtenu $2n$ racines distinctes de Q_n.

Or R_n est de degré $\leqslant 2n-1$ mais comme c'est un polynôme pair il est en fait de degré $\leqslant 2n-2$ et donc $\deg(Q_n) \leqslant 2n$. Enfin, Q_n n'est pas le polynôme nul puisque

$Q_n(\alpha\mathrm{i}) = 1$. Ainsi on a obtenu toutes les racines de Q_n et elles sont simples. En notant λ_n son coefficient dominant on a la factorisation

$$Q_n(X) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(X - a_{k,n})(X + a_{k,n})$$

et ainsi

$$\forall x \in [-1,1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2).$$

Q39. On en déduit que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}\left(1 - (x^2+\alpha^2)R_n(x)\right) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}Q_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^2+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2).$$

La factorisation obtenue à **Q38** est en faite valable pour tout $x \in \mathbb{C}$ (factorisation polynomiale), en particulier la valeur $\alpha\mathrm{i}$ donne

$$1 = Q_n(\alpha\mathrm{i}) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}((\alpha\mathrm{i})^2 - a_{k,n}^2) = \lambda_n(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha^2 + a_{n,k}^2)$$

et ainsi $\lambda_n = \dfrac{(-1)^n}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha^2 + a_{n,k}^2)}$ d'où l'on déduit finalement que

$$\forall x \in [-1,1], \quad f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}.$$

Q40. En particuler pour $x = 1$ on obtient pour tout $\alpha > 0$:

$$|f_\alpha(1) - R_n(1)| = \frac{1}{\alpha}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}.$$

Si l'on choisit $\alpha < \gamma$ ce produit tend vers $+\infty$ d'après **Q36** donc

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty.$$