DM4 soft - Problème 1 - CCP – PSI – 2018

CORRIGE

Partie I - Endomorphismes

Q1. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\Delta(X^k) = XkX^{k-1} = kX^k$. Et pour $k=0$, $\Delta(X^0) = X \times 0 = 0 = 0X^0$.
Donc pour tout $k \in [\![0;n]\!]$:
$$\Delta(X^k) = kX^k.$$

Q2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. En dérivant XP' comme un produit, on obtient :
$$\Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P) = \Delta(XP' - P) = X(P' + XP'' - P') = X^2P''.$$

Q3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc :
$$\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Q4. D'après Q1., on complète les colonnes de la matrice avec les coordonnées, pour $k \in [\![0;n]\!]$, de $\Delta(X^k)$ sur la base canonique. On obtient la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Q5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après Q2., $(\Delta^2 - \Delta)(P) = X^2P''$.
Donc $(\Delta^2 + (a-1)\Delta)(P) = (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\Delta(P) = X^2P'' + aXP' = \Phi(P)$. D'où :
$$\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta.$$

Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ donc Δ^2 également. Par combinaison linéaire :
$$\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].$$

Q6. Avec le même raisonnement, en remplaçant $\mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{R}_n[X]$:
$$\Phi \text{ induit un endomorphisme } \Phi_n \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n.$$

Q7. Dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de Δ_n est diagonale. Ce qui est donc le cas de la matrice de Δ_n^2. D'après l'égalité $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$, la matrice de Φ_n dans la base canonique est diagonale par combinaison linéaire et :
$$\Phi_n \text{ est diagonalisable.}$$

Q8. On remarque que $\varphi = \Phi + b\,\mathrm{Id}$. Φ et Id induisent des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. Par combinaison linéaire :
$$\varphi \text{ induit un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].$$

D'après les égalités précédentes (Q5.), on obtient :
$$\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b\,\mathrm{Id},$$

où Id désigne ici l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q9. D'après Q4., la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale de coefficient diagonal $\delta_k = k$ pour $k \in [\![0;n]\!]$, souvent notée $\mathrm{diag}(0,1,2,\dots,n)$.

D'après Q9., $\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b\,\mathrm{Id}$, donc la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\delta_k^2 + (a-1)\delta_k + b = k^2 + (a-1)k + b$ pour $k \in [\![0;n]\!]$, soit $\mathrm{diag}(b, 1^2 + (a-1)\times 1 + b, 2^2 + (a-1)2 + b, \dots, n^2 + (a-1)n + b)$.

Q10. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \ker(\varphi_n) &\iff \varphi_n(P) = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_n(X^k) = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \left(k^2 + (a-1)k + b\right) X^k = 0 \text{ d'après Q9.} \\
&\iff \forall\, k \in [\![0;n]\!] \ , \ a_k(k^2 + (a-1)k + b) = 0 \\
&\iff \forall\, k \in [\![0;n]\!] \smallsetminus \{m_1, m_2\} \ , \ a_k = 0 \\
&\iff P = a_{m_1} X^{m_1} + a_{m_2} X^{m_2}
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \ker(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2}).$$

Remarque : on pouvait également déterminer le noyau de la matrice de φ_n et revenir aux polynômes à partir des coordonnées trouvées.

Q11. De même, on obtient :

$$\ker(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(X^m)$$

Q12. De même, si l'équation (1) n'admet pas de racine entière, $\ker(\varphi_n) = \{0\}$.

Si $P \in \ker(\varphi) \smallsetminus \{0\}$, notons $n = \deg(P)$. Ainsi $\varphi(P) = \varphi_n(P) = 0$ et $P \in \ker(\varphi_n)$.
Ainsi $\ker(\varphi) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(\varphi_n)$. D'où :

$$\dim \ker(\varphi) \in [\![0;2]\!] \text{ et est égale au nombre de racines entières de l'équation (1).}$$

Partie II - Une équation différentielle

Q13. (2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus. Comme la fonction $x \longmapsto x^2$ ne s'annule pas sur I :

l'ensemble des solutions de (2) sur I est un espace vectoriel de dimension 2.

De même sur J.

Q14. Soit y une solution de (2) sur I. Posons $g = y \circ \exp$. g est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de exp, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I, et de y, définie et deux fois dérivable sur I. On a alors :

$g' = y' \circ \exp \times \exp$ et $g'' = y'' \circ \exp \times \exp^2 + y' \circ \exp \times \exp$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) &= y''(\exp(x)) \times \exp^2(x) + a\ y'(\exp(x)) \times \exp(x) + b\ y(\exp(x)) \\
&= y''(t)t^2 + ay'(t)t + by(t) \text{ en posant } \exp(x) = t \in I \\
&= 0 \text{ car } y \text{ est solution de (2).}
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } g = y \circ \exp \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation (3).}$$

Q15. Posons $h = g \circ \ln$. h est définie et deux fois dérivable sur I par composition de ln, définie et deux fois dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de g, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in I$:
$h'(x) = g'(\ln(x))\dfrac{1}{x}$ et $h''(x) = g''(\ln(x))\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}g'(\ln(x))$.

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } x^2h''(x) + axh'(x) + bh(x) &= g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) \text{ en posant } \ln(x) = t \\
&= 0 \text{ car } g \text{ est solution de (3).}
\end{aligned}$$

Ainsi $g \circ \ln$ est solution sur I de l'équation (2).

Q16. ▶ On commence par résoudre (3), équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. On associe l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1.

Ainsi les solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ sont $u : t \longmapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

D'après Q15. et Q16., les solutions de (2) sur I sont

$$y : x \longmapsto u(\ln(x)) = (\lambda \ln(x) + \mu)\frac{1}{x}\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

▶ De même, avec $2i$ et $-2i$ comme racines de l'équation caractéristique, les solutions de (3) sont $u : t \longmapsto \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (2) sur I sont

$$y : x \longmapsto u(\ln(x)) = \lambda\cos(2\ln(x)) + \mu\sin(2\ln(x))\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Q17. On procède de même qu'en Q14. avec :

$h' = -y' \circ (-\exp) \times \exp$ et $h'' = y'' \circ (-\exp) \times \exp^2 - \exp \times y' \circ (-\exp)$.

On obtient alors $h'' - 4h = 0$ car y est solution de (2).

Donc si y est solution de (2) sur J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

Q18. L'équation caractéristique associée à (3) est $r^2 - 4 = 0$, de racines 2 et -2.

Les solutions de (3) sont donc $u : t \longmapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}$.

D'après Q14. et Q15., les solutions de (2) sur I sont donc $y_I : x \longmapsto \lambda x^2 + \dfrac{\mu}{x^2}$.

De même que Q15., on prouve que si g est solution de (3) sur $\mathbb{R}$, alors $x \longmapsto g(\ln(-x))$ est solution de (2) sur I. Ainsi, les solutions de (2) sur J sont $y_J : x \longmapsto \alpha x^2 + \dfrac{\beta}{x^2}$.

On procède alors à un recollement des solutions : on cherche les conditions sur $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ pour avoir $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} y_J(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^+} y_I(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y_J'(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^+} y_I'(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y_J''(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^+} y_I''(x) \end{cases}$ avec des limites finies.

Pour des limites finies pour y_I et y_J, on obtient $\beta = 0$ et $\mu = 0$. Dans ce cas, ces limites sont alors égales à 0.

Ainsi $y_I : x \longmapsto \lambda x^2$ et $y_J : x \longmapsto \alpha x^2$.

D'où $y_I'(x) = 2\lambda x$ et $y_J'(x) = 2\alpha x$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} y_J'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y_I'(x) = 0$.

Enfin, $y_I''(x) = 2\lambda$ et $y_J''(x) = 2\alpha$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} y_J''(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} y_I''(x) \iff \lambda = \alpha$.

Les fonctions y définies sur $I \cup J$ par $x \longmapsto \lambda x^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = 2\lambda$, qui consiste à prendre

$$y : x \longmapsto \lambda x^2 \text{ définie sur } \mathbb{R},$$

est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on vérifie qu'elle est bien solution de (2) sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Une équation de Bessel

Q19. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0 \ /\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\} \quad \text{et} \quad R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Q20. J_0 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et se dérive terme à terme.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in]-R,R[,\quad J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k\\
J_0'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}\\
J_0''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}\\
x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k\\
x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) &= c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière (sous réserve que $R > 0$), comme J_0 est solution de (4), on en déduit :

$$c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 2, \quad c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2}.$$

Comme, de plus, $c_0 = 1$ par hypothèse, on montre facilement par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad c_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k\ (k!)^2}.$$

Q21. On s'intéresse à la série entière $\sum c_{2k} x^{2k}$. Une série entière converge toujours pour $x = 0$.
Prenons x dans $\mathbb{R}^*$ et notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad u_k(x) = c_{2k} x^{2k}$. Ainsi, $u_k(x) \neq 0$ et

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| = 0 < 1.$$

Donc le critère de d'Alembert permet de conclure que cette série entière converge pour tout réel x et que son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

On a donc prouvé que la somme de cette série entière, appelée J_0 dans l'énoncé, est une solution de (4) sur $\mathbb{R}$.

Q22. J_0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur le segment $[0, r]$ et donc bornée sur ce segment.
J_0 n'est pas la fonction nulle (par unicité du développement en série entière), donc si (J_0, f) est une famille liée de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = aJ_0$ et f est ainsi bornée sur $]0, r[$ et donc au voisinage de 0.

Q23. Par produit de Cauchy, appliqué aux séries entières (absolument convergentes dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\forall\, x \in]-R_\alpha, R_\alpha[\cap]-R_\beta, R_\beta[, \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\right) x^n.$$

Or, cette somme vaut 1 par hypothèse donc, par unicité d'écriture d'une série entière, on a :

$$\alpha_0 \beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Comme $\alpha_0 = 1$ par hypothèse, on obtient :

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Q24. Puisque $0 < r < R_\alpha$, par définition du rayon de convergence, la suite $(\alpha_k r^k)_k$ est bornée, donc :

$$\exists\, M > 0 \;/\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_k r^k| \leqslant M \quad i.e. \quad |\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, H_k l'assertion : « $|\beta_k| \leqslant \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$ ».

— Initialisation : a relation (5) fournit $\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 = 0$. Donc $\beta_1 = -\alpha_1$ et $|\beta_1| = |\alpha_1| \leqslant \dfrac{M}{r}$. Cela montre H_1.

— Hérédité : Prenons k dans $\mathbb{N}^*$ tel que H_1, ..., H_k soient vraies et montrons que H_{k+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
|\beta_{k+1}| &= \left| -\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k+1-j}\, \beta_j \right| \quad \text{(car } \alpha_0 = 1\text{)}\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k} |\alpha_{k+1-j}|\ |\beta_j|\\
&\leqslant \frac{M}{r^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{M}{r^{k+1-j}} \times \frac{M(M+1)^{j-1}}{r^j} \quad \text{(d'après Q.24 et l'hyp. de récurrence)}\\
&\leqslant \frac{M}{r^{k+1}} + \frac{M^2}{r^{k+1}} \left| \frac{(M+1)^k - 1}{(M+1)-1} \right|\\
&\leqslant \frac{M(M+1)^k}{r^{k+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{k+1} est vraie et l'on a établi le résultat souhaité par récurrence.

Q26. On déduit de la question précédente :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad |\beta_k x^k| \leqslant \frac{M}{M+1} \left| \frac{(M+1)x}{r} \right|^k.$$

Les théorèmes de comparaison sur les séries permettent d'affirmer que si $\left| \dfrac{(M+1)x}{r} \right| < 1$, la série géométrique de terme général $\left(\dfrac{(M+1)x}{r} \right)^k$ converge et donc que la série $\sum \beta_k x^k$ est absolument convergente. La série $\sum \beta_k x^k$ est donc absolument convergente pourvu que $|x| \leqslant \dfrac{r}{M+1}$; son rayon de convergence vérifie donc $R_\beta \geqslant \dfrac{r}{M+1} > 0$.

Q27. On note : $\forall\, x \in]0, r[$, $y(x) = \lambda(x) J_0(x)$avec λ fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$. Ainsi, y est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$. Comme J_0 est solution de (4), on obtient

$$\forall\, x \in]0, r[:\ x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) = x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x \lambda'(x) J_0(x).$$

De plus , en notant $\forall\, x \in]0, r[$, $h(x) = x \lambda'(x) J_0^2(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in]0, r[:\ h'(x) &= \lambda'(x) J_0^2(x) + x \lambda''(x) J_0^2(x) + x \lambda'(x)\ 2 J_0(x) J_0'(x)\\
&= \frac{J_0(x)}{x} \ \left(x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) \right).
\end{aligned}$$

- Il est donc clair que si y est solution de (4) sur $]0, r[$ alors h est de dérivée nulle sur $]0, r[$.
- Réciproquement, supposons que $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, r[$. Notons $g : x \longmapsto x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x)$.
  Supposons qu'il existe $x_0 \in]0, r[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Par continuité, g serait non nulle sur un sous-intervalle de $]0, r[$ centré en x_0 et J_0 serait donc nulle sur cet intervalle. Comme J_0 est

solution de $u''+\dfrac{1}{x}u'+u=0$ sur $]0,r[$, J_0 serait identiquement nulle sur $]0,r[$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz comme unique solution de (4) s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0. Elle serait donc nulle en 0 par continuité. Cela contredirait la définition de J_0 ($c_0=1$). Donc g est nulle et y est solution de (4) sur $]0,r[$.

Q28. Par théorème sur le produit de Cauchy des séries entières, J_0^2 est somme d'une série entière de rayon $+\infty$. De plus, $J_0^2(0)=1$.

Q29. Cherchons une fonction λ et un réel $r>0$ tels que $\forall\, x\in]0,r[:\ xJ_0^2(x)\lambda'(x)=1$.
La question **Q27.** nous assurera alors que $(x\longmapsto\lambda(x)J_0(x))$ est solution de (4) sur $]0,r[$.
La question **Q28.** permet d'appliquer le paragraphe sur l'inverse d'une série entière non nulle en 0 à J_0^2.
Il existe donc une série entière $\sum\beta_k x^k$ de rayon $r>0$ et telle que $\beta_0=1$ qui vérifie

$$\forall\, x\in]0,r[:\ J_0^2(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k x^k\right)=1,\quad \therefore\quad xJ_0^2(x)\left(\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k x^{k-1}\right)=1.$$

En prenant

$$\forall\, x\in]0,r[:\ \lambda(x)=\ln(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k\frac{x^k}{k},$$

on obtient bien

$$\forall\, x\in]0,r[:\ xJ_0^2(x)\lambda'(x)=1.$$

Notons

$$\forall\, x\in]0,r[:\ \eta(x)=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k\frac{x^k}{k}\right)\times J_0(x).$$

Par produit de Cauchy, η est la somme d'une série entière de rayon $R_\eta>0$ et, d'après la question **Q27.**,

$$\big(J_1 : x\longmapsto\eta(x)+\ln(x)\ J_0(x)\big)\ \text{est solution de (4) sur }]0,R_\eta[.$$

Q30. Puisque $J_0(0)=1$, la fonction $J_1=\eta+J_0\times\ln$ n'est pas bornée sur $]0,R_\eta[$. D'après la question **Q22.**, la famille (J_0,J_1) est donc libre dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,R_\eta[$ et l'on a une base de solutions de (4). On en déduit que l'ensemble des solutions de (4) sur $]0,R_\eta[$ est

$$\left\{aJ_0+b(\eta+J_0\times\ln)\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}(J_0,\eta+J_0\times\ln).$$