DM4 soft - Problème 2 - CCINP PSI 2021

Corrigé

Partie I

Q1. $\forall z \in \mathbb{C},\ \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z|<1 \\ +\infty & \text{si } |z|>1 \end{cases}$ donc $R=1$.

Q2. D'après ce qui précède, $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1]$. La série converge en 1 $\iff$ $\alpha>1$ (exemple de Riemann) et en $-1 \iff \alpha>0$ (CSSA). Donc $\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \alpha \in]-\infty,0] \\ [-1,1[& \text{si } \alpha\in]0,1] \\ [-1,1] & \text{si } \alpha \in]1,+\infty[\end{cases}$

Q3. Pour $x\geq 0$, la série est à termes positifs donc $f_\alpha(x)\geq 0$.
Pour $x\leq 0$, la série satisfait les hypothèses du CSSA donc sa somme est du signe de son 1er terme : $f_\alpha(x)\leq 0$.

Q4. D'après le cours, $f_0(x)=\frac{1}{1-x}$ et $f_1(x)=-\ln(1-x)$.
Par le théorème de dérivation des SE, $f_0'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{x}f_{-1}(x)$ donc $f_{-1}(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$

Q5. Pour $\alpha>1$, la série converge normalement sur $[-1,1]$ donc f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha=[-1,1]$.

Q6. $\forall x\in[0,1[,\ \frac{x^n}{n^\alpha}\geq\frac{x^n}{n}$ donc $f_\alpha(x)\geq f_1(x)$. Or $f_1(x)=-\ln(1-x)\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-} f_\alpha(x)=+\infty$.

Q7. G_α converge en $x=1$ donc $1\in\mathcal{D}_\alpha$ *ie* $\alpha>1$ et $G_\alpha(1)=1$ donc $\lambda f_\alpha(1)=1$.

Q8. X_α admet une espérance $\iff$ G_α est dérivable en 1 $\iff$ $\alpha>2$ et dans ce cas, $G_\alpha'(x)=\lambda f_\alpha'(x)=\frac{\lambda}{x}f_{\alpha-1}(x)$.
Donc $E(X_\alpha)=G_\alpha'(1)=\frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}$.

Partie II

Q9. Pour $x\in]-1,1[,\ \ln(1+x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n}$

Q10. $R_S=1$ et pour $x\in]-1,1[,\ \exp(S(x))=1+x$.

Q11. $R_g=\frac{1}{|z_0|}R_S=\frac{1}{|z_0|}$.

Q12. D'après le théorème de dérivation des SE, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_g,R_g[\supset[0,1]$ et $g'(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z_0^n t^{n-1}=\frac{z_0}{1+tz_0}$.

Q13. D'après ce qui précède, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $h'(t)=g'(t)h(t)=\frac{z_0}{1+tz_0}h(t)$.

Q14. On remarque que la fonction $z : t\mapsto 1+tz_0$ est solution de cette équation différentielle. De plus, $z(0)=1=h(0)$. Ainsi, h et z sont solutions du même problème de Cauchy, donc elle sont égales. En $t=1$, on obtient $h(1)=\exp(S(z_0))=z(1)=1+z_0$.

Partie III

Q15. $t\mapsto\frac{x^t}{t^\alpha}=\frac{e^{t\ln x}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
$0\leq\frac{x^t}{t^\alpha}\leq\frac{1}{t^\alpha}$ qui est intégrable sur $]0,1]$.
$\forall t\geq1,\ 0\leq\frac{x^t}{t^\alpha}\leq e^{t\ln x}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\ln x<0$.

Q16. On effectue le changement de variable $u=-t\ln x$, $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$:
$I(x)=(-\ln x)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}u^{-\alpha}e^{-u}\,\mathrm{d}u=(-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$.

Q17. $t\mapsto x^t=e^{t\ln x}$ et $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ sont décroissantes positives sur $\mathbb{R}_+^*$ donc aussi leur produit.

Q18. $\forall t\in[n,n+1],\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\leq\frac{x^t}{t^\alpha}\leq\frac{x^n}{n^\alpha}$ donc en intégrant sur $[n,n+1]$, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\leq\int_n^{n+1}\frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\leq\frac{x^n}{n^\alpha}$.
On somme les 1res inégalités pour $n\in\mathbb{N}$ et les 2es pour $n\in\mathbb{N}^*$ et on obtient le résultat attendu.

Q19. $t\mapsto\frac{x^t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $I(x)=(-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\underset{x\to1}{\longrightarrow}+\infty$ car $\alpha<1$. Donc $\int_1^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\underset{x\to1}{\sim}\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t=(-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$. En divisant par ce même équivalent et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient $f_\alpha(x)\underset{x\to1}{\sim}(-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$.