EXERCICE 1 - d'après CCP PC 2019

Etude d'une équation différentielle

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Q1. f est la somme d'une série entière de rayon $r > 0$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r;r[$ et on peut dériver terme à terme à tout ordre ; en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-r;r[$ et, pour $x \in]-r;r[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Par propriété des séries entières, ces deux séries sont aussi de rayon r.

Q2. On a donc, pour $x \in]-r;r[$, $x^2 f''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$

$x^3 f''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n$

$x f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$

$x^2 f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$

$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1)a_n \\
&\quad -(n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n \big) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n^2 - 2n + 1) a_n - (n^2 - 3n + 2 + n - 1) a_{n-1} \right) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, $(n-1)^2 = 0$ donc, si on pose, pour $n \geq 2$, $b_n = (n-1)^2$, on a

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

Q3. La somme d'une série entière est nulle sur $]-r;r[$ $(r > 0)$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (unicité d'un développement en série entière) donc, d'après la question précédente, f est solution de (H) si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $b_n(a_n - a_{n-1}) = 0$. Mais, pour $n \geq 2$, $b_n \neq 0$ donc $a_n - a_{n-1} = 0$.
En passant de n à $n+1$ on a finalement : f est solution de (H) sur $]-r;r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n$.

Q4. On suppose que f est solution de (H) sur $]-r;r[$. Alors, $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_1$.
La série géométrique $\sum x^n$ est de rayon 1 donc $r \geq 1$ ($r = +\infty$ si $a_1 = 0$) et, en posant $\lambda = a_1$, pour $x \in]-1;1[$, $f(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.
Il s'agit de la somme d'une série géométrique de raison $x \in]-1;1[$ et de premier terme x donc, pour $x \in]-1;1[$,

$$f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

Q5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda x}{1-x}$.

Alors, d'après le calcul précédent, pour $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$: g est la somme d'une série entière de rayon $1 > 0$. De plus, pour $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = \lambda$; par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n$.
On peut donc utiliser la question **Q2** (qui est une équivalence) pour conclure que g est une solution de (H) sur $]-1;1[$, développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$

Q6. Par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour $x \in I$,

$$z'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) \text{ et } z''(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x) - \frac{2}{x^2}y'(x) + \frac{2}{x^3}y(x).$$

Q7. Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} xz''(x) + z'(x) &= (1-x)y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) + (1/x - 1)y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\right) \end{aligned}$$

donc y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation
$$xz'' + z' = 2x$$

Q8. z est solution de (E_1) sur I si et seulement si z' est solution sur (I) de l'équation
$(E_2): \ xZ' + Z = 2x.$
L'équation homogène associée à (E_2) est $(H_2): \ xZ' + Z = 0$, équivalente à $Z' + \dfrac{1}{x}Z = 0$ (x ne s'annule pas sur I). $a : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur I ; une primitive de a est $x \mapsto \ln(x)$ donc les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$.
$x \mapsto x$ est solution particulière de (E_2) donc les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + x$.
Finalement, z est solution de (E_1) sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z'(x) = \dfrac{\lambda}{x} + x$.

Q9. Ceci équivaut à l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z(x) = \lambda \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} + \mu$.
De plus, pour $x \in I$, $\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} \neq 0$ donc y est solution de (E) sur I si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in I$, $y(x) = \dfrac{x}{1-x}\left(\lambda \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} + \mu\right)$.
Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions de la forme
$$x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}\ln(x) + \frac{\mu x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}$$
lorsque (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Q10. Soit f une solution de (E) sur $]0;+\infty[$. Alors f est solution sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. D'après la question précédente il existe des constantes réelles $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ telles que
$$\forall x \in]0;1[, \ f(x) = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_1 x + x^3}{2(1-x)}$$
$$\forall x \in]1;+\infty[, \ f(x) = \frac{\lambda_2 x \ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_2 x + x^3}{2(1-x)}$$
f doit être continue en 1 donc doit avoir une limite finie en 1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{1-x} = -1$ (limite usuelle) donc on doit avoir $2\mu_1 + 1 = 2\mu_2 + 1 = 0$: $\mu_1 = \mu_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Pour $x \in]0;1[$, $f(x) = \dfrac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} + \dfrac{-x+x^3}{2(1-x)} = \dfrac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} - \dfrac{x(1+x)}{2}$
Pour obtenir le nombre dérivée de f à gauche à 1, on cherche le $DL_1(1)$ de f :
Pour h au voisinage de 0, $\ln(1+h) = h - \dfrac{1}{2}h^2 + o(h^2)$ donc

$$f(1+h) = -\lambda_1 \frac{(1+h)(h-h^2/2+o(h^2)}{h} - \frac{(1+h)(2+h)}{2}$$

et, après simplification,

$$f(1+h) = -\lambda_1 - 1 - \left(-\frac{\lambda_1}{2} - \frac{3}{2}\right) h + o(h)$$

On en déduit que $f'_g(1) = -\dfrac{\lambda_1}{2} - \dfrac{3}{2}$.
De même, $f'_d(1) = -\dfrac{\lambda_2}{2} - \dfrac{3}{2}$
f est dérivable donc $\lambda_1 = \lambda_2$.
Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \dfrac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} - \dfrac{x(1+x)}{2}$ et $f(1) = -\lambda_1 - 1$.
Pour la réciproque, il suffit que montrer qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$f(1+h) = -\lambda_1(1+h)\dfrac{\ln(1+h)}{h} - \dfrac{(1+h)(2+h)}{2}$.
$h \mapsto \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est prolongeable en une fonction développable en série entière de rayon 1 donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On peut alors conclure que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions f définies par $f(1) = -\lambda_1 - \dfrac{1}{2}$ et, pour $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} - \dfrac{x(1+x)}{2}$ avec λ_1 réel quelconque.

Exercice 2 - d'après CCINP MP 2024

Q11. On sait déjà que la famille $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable (puisque que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et à termes positifs). On note S sa somme.
On a donc, par sommation par paquets $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.
D'où $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S$ soit

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I

Q12. • $x \mapsto \sin^{n+1} x$ est dérivable par composée de fonctions dérivables et sa dérivée est $x \mapsto (n+1)\cos x \sin^n x$.

- On fait une intégration par parties dans W_{n+2} :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \sin t dt \\ &= [\sin^{n+1}(t)(-\cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^n t \cos t dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(1-\sin^2 t)dt \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

Finalement,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

- On peut le vérifier en raisonnant par récurrence sur n.
  - On a $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1$ d'une part et d'autre part, $\frac{2^0 0!^2}{1!} = 1$. La formule est validée au rang 0.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on a $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Alors

$$\begin{aligned} W_{2n+3} &= \tfrac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \\ &= \tfrac{2n+2)}{2n+3}\tfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \tfrac{(2n+2)^2 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \tfrac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

  ce qui valide la formule au rang $n+1$.

Q13. • Soit $x \in]-1,1[$. D'après le cours

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)...(\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)...\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1.3.....(2n-1)}{2^n n!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(2n)!}{2^n n! 2.4....(2n)} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \end{aligned}$$

- Par primitivation, on obtient que Arcsin est développable en série entière sur $]-1,1[$ et, comme $\text{Arcsin}(0) = 0$, on a pour $x \in]-1,1[$,

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

Q14. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On a $x = \text{Arcsin}(\sin x)$. Comme $\sin x \in [0,1[$, on a d'après la question précédente,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$$

Q15. Nous allons appliquer le théorème d'intégration terme à terme, pour cela, on note $f_n : x \in [0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin x)^{2n+1}$ et $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}[\mapsto x$.

- D'après la question 11, $\sum f_n$ converge simplement vers f.

- Les f_n et f sont continues par morceaux.
- Les f_n sont intégrables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
- $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n|$ converge (car $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge)

On a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \ \mathrm{d}x$.

Q16. Le calcul précédent donne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ ie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'après la question 8,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie II

Q17.
- Pour $x \in]-1,1[$, on a $x^2 \in [0,1[$ donc $\frac{1}{x^2-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$.
- On applique le théorème d'intégration terme à terme. Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in]0,1[\mapsto -x^{2n} \ln x$ et $f : x \in]0,1[\mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$.
  - $\sum f_n$ converge simplement vers f d'après le début de la question
  - les f_n et f sont continues par morceaux
  - les f_n sont intégrables : car, pour $n \geq 1$, sont continues et ont une limite finie en 0 et en 1 et $f_0 = -\ln$ est intégrable sur $]0,1[$ car continue, a une limite finie en 1 et, en 0, $\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ avec $x > 0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable en 0. De plus, $\int_0^1 |f_n(t)|dt = -\int_0^1 f_n(t)dt$. Notons-la I_n. Pour la calculer, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = t^{2n+1}$ et $v(t) = \ln t$. Comme uv a une limite finie en 0 et en 1 (elles valent 0),on peut réaliser une intégration par parties et on a $\int_0^1 -t^{2n} \ln t dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
  - $\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt$ converge car $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge

  On conclut que f est intégrable sur $]0,1[$ et qu'on a

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 -t^{2n} \ln t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Q18. Notons $g : (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- Pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g(x,t)$ est continue
- Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $t > 0 \mapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux)

- Domination : soit $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $|g(x,t)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}$ et $\phi : t > 0 \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On conclut que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q19 . On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- Pour $t > 0$, $x \in]0,1] \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $(x,t) \in]0,1] \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}$.
- Pour $x \in]0,1]$, $t > 0 \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable (fait dans la question précédente)
- Pour $x \in]0,1]$, $t > 0 \mapsto \frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}$ est continue (par morceaux)
- Domination : soit $]a,1] \subset]0,1]$, $(x,t) \in]a,1] \times \mathbb{R}_+^*$, $|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{t}{1+a^2t^2}\frac{1}{1+t^2}$ et $\psi : t > 0 \mapsto \frac{t}{1+a^2t^2}\frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: en effet, ψ a une limite finie en 0 et en $+\infty$, $\psi(t) \sim \frac{1}{a^2t^3}$ qui est intégrable en $+\infty$.

On conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et qu'on a pour $x \in]0,1]$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt$$

Q20.
- $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2} = \frac{(1-x^2)t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$
- Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \tfrac{t}{1+t^2} - \tfrac{x^2t}{1+t^2x^2}dt \\
&= \tfrac{1}{1-x^2}\left[\tfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2x^2)\right]_0^{+\infty} \\
&= \tfrac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\tfrac{1+t^2}{1+t^2x^2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \tfrac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\tfrac{1}{x^2}\right) \\
&= \tfrac{1}{x^2-1}\ln x
\end{aligned}$$

Q21.
- Calculons $f(1)$. On a $f(1) = \int_0^{+\infty}\frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}dt$. On réalise une intégration par parties avec $u = v = \text{Arctan}$: le produit uv, a une limite finie en 0 et en $+\infty$. L'intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}dt = [\text{Arctan}^2(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\text{Arctan}(t)}{1+t^2}dt$$

et ainsi, $f(1) = \frac{\pi^2}{8}$.

- Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, on a $\int_\varepsilon^1 f'(t)dt = f(1) - f(\varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0, et en utilisant la continuité de f en 0, on obtient $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt = f(1) - f(0) = f(1)$. Ainsi, $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On retrouve à nouveau qu'on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3

File d'attente

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q22. Par définition, T_1 correspond au rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Donc T_1 suit une loi géométrique de paramètre p, ce qui correspond au résultat attendu.
De manière plus élémentaire, soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :

$$\{T_1 = k\} = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i = 0\}\right) \cap \{X_k = 1\}\,.$$

Donc, par indépendance des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$,

$$\mathbf{P}(T_1 = k) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_i = 0)\right) \times \mathbf{P}(X_k = 1) = (1-p)^{k-1}\,p\,.$$

Finalement, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\,p\,.}$

Q23. L'événement A est réalisé si et seulement si aucun des événements $\{T_1 = k\}$ n'est réalisé :

$$\boxed{A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{T_1 = k\}} = \Omega \setminus \left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\}\right).}$$

Or, par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(T_1 = k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\,p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Donc $\boxed{\mathbf{P}(A) = 0}$ et

$\boxed{\text{presque sûrement, un nouveau client doit arriver dans la file.}}$

Q24. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k = \mathbf{P}(T_1 = k) = p\,(1-p)^{k-1} > 0$. Alors :

$$\forall k \geq 1,\ \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - p \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - p\,.$$

Donc, par le critère de d'Alembert appliqué aux séries entières, $\boxed{R = \frac{1}{1-p}\,.}$
Soit $t \in]-R, R[$. Alors

$$G_{T_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = pt \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{k-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Finalement, $\boxed{\forall t \in]-R, R[\,,\ G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1+(p-1)t}\,.}$

Q25. Par indépendance des variables (T_k),

$$\boxed{\forall t \in]-R, R[\,, G_{D_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t) = G_{T_1}^n(t) = \left(\frac{pt}{1+(p-1)t}\right)^n.}$$

Q26. Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 est donné par :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\,,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k)}{k!}\, x^k\,.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $t \in]-R,R[$. Alors, $|(p-1)t| < 1$ donc, par ce qui précède,

$$G_{D_n}(t) = p^n t^n (1+(p-1)t)^{-n} = p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (p-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, p^n (p-1)^k t^{n+k}$$

où $c_k = \frac{-n(-n-1)\dots(-n+1-k)}{k!} = (-1)^k \binom{k+n-1}{k}$.

Finalement,

$$\boxed{\forall t \in]-R,R[\,,\ G_{D_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k t^{n+k} = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n} p^n (1-p)^{j-n} t^j.}$$

Alors, par unicité du développement en série entière, sachant que $P_{D_n}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(D_n = k) t^k$,

$$\boxed{\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbf{P}(D_n = k) = \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n}}$$

avec, par convention, $\binom{k-1}{k-n} = 0$ si $k < n$.

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Q27. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = \exp(-a) > 0$ et $f(1) = \exp(0) = 1$. On en déduit que :

$$\forall t \in]0,1[,\ f(t) \in]f(0), f(1)[\subset]0,1[\,.$$

Autrement dit, l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition

$$(H_n) :\ (z_n \in]0,1[\quad \text{et} \quad z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1)\,.$$

(a) Initialisation : Par hypothèse, $z_1 \in]0,1[$, donc (H_1) est vérifiée.

(b) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (H_n) est vraie.
Alors $z_n \in]0,1[$ donc par stabilité de $]0,1[$ par f, $z_{n+1} = f(z_n) \in]0,1[$.
De plus, par croissance de f, $z_{n+2} - z_{n+1} = f(z_{n+1}) - f(z_n)$ a même signe que $z_{n+1} - z_n$,
donc $z_{n+2} - z_{n+1}$ a même signe que $z_2 - z_1$. Finalement, (H_{n+1}) est vérifiée.

(c) Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \in]0,1[\quad \text{et } z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1.}$

Q28. La suite (z_n) est une suite réelle monotone et bornée.
Donc, par le théorème de la limite monotone, (z_n) converge. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} z_n$.
Par ce qui précède,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < z_n < 1$$

donc, par passage à la limite, $0 \leq \ell \leq 1$. De plus, par définition de (z_n),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n)\,.$$

Alors, par passage à la limite et par continuité de f, on obtient :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = f(\ell)\,.$$

Finalement, $\boxed{\text{la suite } (z_n) \text{ converge, et sa limite } \ell \in [0,1] \text{ est un point fixe de } f.}$

Q29. Soit $x \in \,]0,1]$. Alors, par croissance de exp,

$$\boxed{0 \leq \psi(x) \iff a(x-1) \leq \ln(x) \iff \exp(a(x-1)) \leq \exp(\ln(x) \iff f(x) \leq x.}$$

De même, par bijectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\psi(x) = 0 \iff a(x-1) = \ln(x) \iff \exp(a(x-1)) = \exp(\ln(x) \iff f(x) = x.}$$

Q30. La fonction ψ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in \,]0,1[\,,\ \psi'(x) = \frac{1}{x} - a > 1 - a \geq 0$.

On en déduit que ψ est strictement croissante sur $]0,1]$ et $\forall x \in \,]0,1]\,$, $\psi(x) \leq \psi(1) = 0$.

De plus, comme ψ est strictement croissante sur $]0,1]$, $\boxed{\psi \text{ ne s'annule qu'en } 1.}$

Alors, par la question **Q9**, $\forall x \in \,]0,1]\,,\ f(x) = x \iff \psi(x) = 0 \iff x = 1\,.$

Autrement dit, 1 est l'unique point fixe de f dans $]0,1]$, et donc dans $[0,1]$ car $f(0) \neq 0$.

Alors, par la question **Q8.**, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = 1.}$

Q31. Sachant que $a > 1$, les variations de ψ sont données par :

x	0		$1/a$		1
$\psi'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$\psi(1/a)$	$\searrow$	0

Alors $\psi(1/a) > 0$ et $\lim_{x\to 0} \psi(x) < 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in \,]0, 1/a[$ tel que $\psi(\alpha) = 0$. La stricte croissance de ψ sur $]0, 1/a[$ assure l'unicité de α.
Finalement, $\boxed{\text{il existe } \alpha \in \,]0,1] \text{ tel que } \forall x \in \,]0,1],\ \psi(x) \geq 0 \iff x \geq \alpha.}$

La question **Q9.** entraine alors que

$$\boxed{\forall x \in \,]0,1],\ f(x) = x \iff \psi(x) = 0 \iff x = \alpha \text{ ou } x = 1.}$$

1er cas : $z_1 \in]0, \alpha]$. Par croissance de f,

$$\forall x \in]0, \alpha], \; f(x) \leq f(\alpha) = \alpha.$$

On en déduit que $]0, \alpha]$ est stable par f et $\forall n \geq 1, \; z_n \leq \alpha$.
Par passage à la limite, on en déduit que $\ell \leq \alpha$. Or α est l'unique point fixe de f sur $[0, \alpha]$.
Donc, par la question **Q8**, $\lim_{n \to +\infty} z_n = \alpha$.

2ème cas : $z_1 \in]\alpha, 1[$. De même, par stricte croissance de f, $\forall x \in]\alpha, 1[\,, \; f(x) > f(\alpha) = \alpha$.
Donc $]\alpha, 1[$ est stable par f et $\forall n \geq 1, \; \alpha < z_n < 1$.
De plus $\psi \geq 0$ sur $]\alpha, 1]$ donc, par la question **Q9**, $\forall x \in]\alpha, 1], \; f(x) \leq x$.
Cela entraine que la suite (z_n) est décroissante, donc $\ell \leq z_1 < 1$ et, comme précédemment, $\ell = \alpha$.

Finalement, dans les deux cas, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} z_n = \alpha.}$

II.2 - Groupes de clients

Q32. L'événement Z se réalise s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $V_n = 0$, c'est-à-dire si un groupe est passé au guichet sans qu'aucun nouveau client n'arrive entre-temps. Donc l'événement Z correspond à la situation où

à un moment donné, le guichet s'est libéré sans aucun nouveau client à servir.

Q33. La variable aléatoire N_n correspond au nombre de succès lors de la succession de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Donc N_n suit une loi binomiale $B(n, p)$:

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \; \mathbf{P}(N_n = k) = \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.}$$

Q34. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Par définition, V_1 est le nombre de clients arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, S]\!]$. Donc, avec les notations précédentes, $V_1 = N_S$. On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{P}(V_1 = k | S = n) = \mathbf{P}(N_n = k) = \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant que $(\{S = n\})_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(V_1 = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(V_1 = k | S = n)\, \mathbf{P}(S = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\,.$$

Finalement, après simplification,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; \mathbf{P}(V_1 = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda}\, e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,,$$

donc $\boxed{V_1 \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$

Q35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\{V_n = 0\} \subset \{V_{n+1} = 0\}$. Donc, par continuité croissante de $\mathbf{P}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\{V_n = 0\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{V_n = 0\}\right) = P(Z)\,.$$

Cela signifie que $\boxed{(z_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} z_n = P(Z).}$

Q36. Soit $j \in \mathbb{N}$.

1er cas : $j = 0$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = 0\right) = 1 = \mathbf{P}(V_n = 0)^0$.

2ème cas : $j \geq 1$. Supposons que $V_1 = j$. Alors le premier groupe est composé des clients de 1 à j.
Par analogie avec les groupes de clients définis dans l'énoncé, pour tout client d'indice $1 \leq i \leq j$,
on note $G_1^{(i)}$ l'ensemble des clients du deuxième groupe qui sont arrivés pendant que i est servi.
Puis, récursivement, pour tout $k \geq 2$, on note $G_k^{(i)}$ l'ensemble des clients du $(k+1)$-ième groupe arrivés pendant que les clients de $G_{k-1}^{(i)}$ sont servis.

Alors, par construction, le $(k+1)$-ième groupe est l'union disjointe des $(G_k^{(i)})_{1\leq i\leq j}$, donc

$$V_{k+1} = \sum_{i=1}^{j} V_k^{(i)}\,,$$

où $V_k^{(i)}$ représente le nombre de clients de $G_k^{(i)}$.
Or, pour tout i, la variable $V_k^{(i)}$ suit un processus identique à celui de la variable V_k en ne considérant que les temps de passage des clients appartenant aux groupes issus du client i.
On en déduit que $V_k^{(i)}$ suit la même loi que V_k et, faute de preuve rigoureuse, il est intuitivement raisonnable de considérer que les variables $\left(V_k^{(i)}\right)_{1\leq i\leq j}$ sont indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par positivité des variables $V_n^{(i)}$,

$$\{V_{n+1} = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{V_n^{(i)} = 0\}$$

donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \prod_{i=1}^{j} \mathbf{P}\left(V_n^{(i)} = 0\right) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j.$$

Finalement, $\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j.}$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant que $(\{V_1 = j\})_{j\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$z_{n+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) \mathbf{P}\left(V_1 = j\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(V_n = 0)^j e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p z_n)^j}{j!}.$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = e^{-\lambda p}\, e^{\lambda p z_n} = \exp(\lambda p(z_n - 1))\,.}$

Q38. D'après la question précédente, la suite (z_n) vérifie toutes les hypothèses de la partie **II.1.** avec $a = \lambda p$.

Donc, d'après la question **Q10**, $\boxed{\text{si } \lambda p \leq 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} z_n = 1.}$

De plus, d'après la question **Q11**, $\boxed{\text{si } \lambda p > 1, \text{ alors } (z_n) \text{ converge vers un réel } \alpha < 1.}$

FIN