Autour des fonctions hypergéométriques

I Suites et séries hypergéométriques

Q 1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, alors il existe $K \in \mathbb{R}^*$ (K non nul pour avoir $P \neq 0$ conformément à l'énoncé ?) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = Ku_n$, ou encore : $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ avec $P = K$ et $Q = 1$ (polynômes constants, non nuls puisque $K \neq 0$). Ainsi,

$$\boxed{\text{toute suite géométrique est hypergéométrique.}}$$

Q 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $n \geqslant p$ alors $u_n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et $u_{n+1} = \binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}$. u_n est non nul donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!}}{\frac{n!}{p!(n-p)!}} = \frac{n+1}{n+1-p} \text{ donc } \boxed{(n+1-p)u_{n+1} = (n+1)u_n}$$

— Si $n < p-1$ alors $u_n = u_{n+1} = 0$ (convention de l'énoncé) donc la relation précédente est encore valable.

— Si $n = p-1$ alors $u_n = 0$ (convention de l'énoncé) et $n+1-p = 0$ donc la relation précédente est encore valable.

Finalement, en posant $P = X+1$ et $Q = X+1-p$, on a deux polynômes non nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ de sorte que

$$\boxed{\text{la suite } \left(\binom{n}{p}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est hypergéométrique.}}$$

Q 3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles u telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n(n-1)(n-2)u_n = n(n-2)u_{n+1}.$$

Remarquons tout de suite que si $u \in \mathcal{S}$ alors $u_2 = 0$ (en évaluant la relation précédente en $n = 1$). En évaluant en $n = 0$ et $n = 2$, on obtient $0 = 0$ ce qui ne donne aucune information. Puis, si $n \geqslant 3$, $n(n-2) \neq 0$ donc $u_{n+1} = (n-1)u_n$. Le terme u_3 va donc donner tous les suivants.

Résumons : u_0 et u_1 sont quelconques, $u_2 = 0$ et u_3 est quelconque et détermine tous les termes suivants.

Il est immédiat que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel (il contient la suite nulle et il est stable par combinaison linéaire). On pose alors $\theta : u \in \mathcal{S} \mapsto (u_0, u_1, u_3) \in \mathbb{R}^3$ qui est évidemment linéaire.

— Elle est injective puisque si $u_0 = u_1 = u_3 = 0$ alors $u = 0$ par les remarques précédentes.

— Elle est surjective puisque si l'on se donne a, b, c trois réels, on peut définir la suite u par $u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_2 = 0$, $u_3 = c$ puis $u_{n+1} = (n-1)u_n$ pour tout $n \geqslant 3$. Cette suite est bien dans $\mathcal{S}$ et vérifie $\varphi(u) = (a, b, c)$.

Ainsi, φ est un isomorphisme donc

$$\boxed{\dim(\mathcal{S}) = 3}$$

Si l'on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puisque φ est un isomorphisme, $(\varphi^{-1}(e_1), \varphi^{-1}(e_2), \varphi^{-1}(e_3))$ est une base de $\mathcal{S}$.

— $x = \varphi^{-1}(e_1)$ est la suite définie par $x_0 = 1$ et $x_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

— $y = \varphi^{-1}(e_2)$ est la suite définie par $y_1 = 1$ et $y_n = 0$ pour tout $n \neq 1$.

— $z = \varphi^{-1}(e_3)$ est la suite définie par $z_n = 0$ pour tout $n \leqslant 2$, $z_3 = 1$ et pour tout $n \geqslant 3$, $z_{n+1} = (n-1)z_n$. On vérifie facilement par récurrence que ceci donne $z_n = (n-2)!$ pour $n \geqslant 3$.

$$\boxed{(x, y, z) \text{ est une base de } \mathcal{S}.}$$

Q 4. Pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)} u_n$ puisque $Q(n) \neq 0$. En évaluant en n_0 on obtient $u_{n_0+1} = 0$ puisque $P(n_0) = 0$. Enfin, par récurrence avec la relation $u_{n+1} = \frac{P(n)}{Q(n)} u_n$ on a facilement $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant n_0 + 1$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle à partir d'un certain rang.}}$$

II Extension de la factorielle

Q 5. Soit $x > 0$. On pose $f_x : t > 0 \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t+(x-1)\ln(t)}$. Elle est continue sur $]0, +\infty[$ et il s'agit d'étudier son intégrabilité en 0 et $+\infty$.

— En $+\infty$: par croissances comparées, $t^2 t^{x-1} e^{-t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ donc $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrales de Riemann en $+\infty$ avec $2 > 1$), f_x aussi.

— En 0 : $f_x(t) \sim t^{x-1}$ quand t tend vers 0 (puisque $e^{-t} \to 1$) et $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 (intégrales de Riemann en 0 avec $1 - x < 1$ car $x > 0$) donc f_x aussi.

Ainsi, f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc

$$\boxed{\Gamma \text{ est bien définie sur }]0, +\infty[.}$$

Remarque : la positivité de f_x permet de confondre la convergence de l'intégrale et l'intégrabilité de la fonction. Cette dernière notion est plus simple à utiliser puisqu'elle est conservée par équivalent et sera donc privilégiée dans la suite.

Q 6. Soit $x > 0$. f_x est continue, strictement positive (donc positive et non nulle) et intégrable sur $]0, +\infty[$. On sait alors (cours) que son intégrale est strictement positive :

$$\boxed{\Gamma \text{ est strictement positive.}}$$

On montre maintenant la continuité de Γ par le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Fondamentalement, $(x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, donc il s'agira de se concentrer sur la domination. Appliquons tout de même à l'énoncé du programme !
On définit pour cela $f : (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

— Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

— Pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

— Pour la domination, on confine le paramètre dans un segment : soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On suppose désormais $x \in [a, b]$. Soit $t > 0$.

  — Si $t \geqslant 1$ alors $0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} = e^{-t+(x-1)\ln(t)} \leqslant e^{-t+(b-1)\ln(t)}$ puisque $\ln(t) \geqslant 0$, $x-1 \leqslant b-1$ et exp est croissante.

  — Si $t < 1$ alors $0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} = e^{-t+(x-1)\ln(t)} \leqslant e^{-t+(a-1)\ln(t)}$ puisque $\ln(t) < 0$, $x-1 \geqslant a-1$ et exp est croissante.

  Ainsi, en posant pour $t > 0$, $\theta(t) = \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \\ t^{a-1}e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$, on a pour tout $t > 0$, $\boxed{|f(x,t)| \leqslant \theta(t)}$

  θ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ (mêmes arguments que pour l'existence de Γ).

Ainsi, le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que Γ est continue sur $[a, b]$. Ceci étant valable pour tout segment de $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{\Gamma \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

Q 7. Soit $x>0$. Comme $x+1>0$, $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ existent. On réalise alors une intégration par parties sur $\Gamma(x+1)$ en posant

$$\begin{array}{ll} u'(t)=e^{-t} & u(t)=-e^{-t} \\ v(t)=t^x & v'(t)=xt^{x-1} \end{array}$$

u est v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, $t^x e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées) et $t^x e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $x>0$ donc l'existence des intégrales et du crochet donne

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).}$$

Q 8. $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=[-e^{-t}]_0^{+\infty}=1$. Une récurrence avec la question précédente donne alors

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!}$$

Le prolongement évoqué par l'énoncé est sans mystère : il suffit de définir $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ *lorsque* $x\in]-1,0[$ *de sorte que la relation II.1 reste vraie (malin, non ?) et le prolongement a la même régularité sur* $]-1,0[$ *que sur* $]0,1[$*. Pour* $]-2,-1[$*...*

III Fonctions hypergéométriques

III.A Symbole de Pochhammer

Q 9. Soit a un entier négatif ou nul. Si n est un entier strictement supérieur à $-a$ alors $[a]_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(a+k)=0$ car l'entier naturel $k=-a$ apparaît comme indice dans ce produit. Ainsi,

$$\boxed{\text{la suite } ([a]_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle à partir d'un certain rang.}}$$

Q 10. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\boxed{[a]_{n+1}}=\prod_{k=0}^{n}(a+k)=a\prod_{k=1}^{n}(a+k)=a\prod_{k=1}^{n}(a+1+k-1)=a\prod_{i=0}^{n-1}(a+1+i)=\boxed{a[a+1]_n}$$

Q 11. – Si $a\in\mathbb{N}^*$ alors pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{[a]_n}=a(a+1)\dots(a+n-1)=\frac{1.2.\dots.(a-1).a(a+1)\dots(a+n-1)}{1.2.\dots.(a-1)}=\boxed{\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}}$$

– Si $a\in D$, on remplace dans l'expression précédente les factorielles par la fonction Γ. Ceci nous incite à montrer par récurrence que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall a\in D,\ [a]_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}}$$

L'initialisation pour $n=0$ est claire et si le résultat est acquis au rang $n\in\mathbb{N}$ alors $[a]_{n+1}=a[a+1]_n=a\frac{\Gamma(a+1+n)}{\Gamma(a+1)}=a\frac{\Gamma(a+1+n)}{a\Gamma(a)}=\frac{\Gamma(a+1+n)}{\Gamma(a)}$ où l'on a utilisé la question 7, la question 10 et l'hypothèse de récurrence (légitime car $a+1\in D$ puisque $a\in D$).
On remarque que l'expression avec la fonction Γ est toujours valable...

III.B Fonction hypergéométrique de Gauss

Q 12. Puisque c n'est pas un entier négatif, chaque facteur de $[c]_n$ est non nul donc $[c]_n \neq 0$ donc

$$\boxed{\tfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n} \text{ est bien défini pour tout entier naturel}}$$

Q 13. La définition des suites hypergéométriques montre facilement que le produit et le quotient de deux telles suites est encore une telle suite.

- Pour a réel quelconque, la suite $([a]_n)$ est hypergéométrique puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a]_{n+1} = (a+n)[a]_n$.
- En particulier la suite $(n!) = ([1]_n)$ est donc hypergéométrique.

On en déduit donc par produit et quotient que $\left(\frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite hypergéométrique donc

$$\boxed{\text{la série entière } \sum \tfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\tfrac{x^n}{n!} \text{ est hypergéométrique.}}$$

Mais on nous demande des polynômes associés donc il faut faire le calcul : pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{[a]_{n+1}[b]_{n+1}}{[c]_{n+1}(n+1)!} = \frac{(a+n)[a]_n(b+n)[b]_n}{(c+n)[c]_n n!}\frac{1}{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}u_n$$

$$\text{d'où } \boxed{(n+1)(c+n)u_{n+1} = (a+n)(b+n)u_n}$$

Il reste donc à poser $P = (a+X)(b+X)$ et $Q = (X+1)(c+X)$ qui sont bien deux polynômes non nuls.

Q 14. Puisque c n'est pas un entier négatif, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}u_n$$

On a donc une récurrence linéaire d'ordre 1 donc (même type de preuve que pour la question 3, le programme ne donnant ce résultat que pour les suites récurrentes à coefficients constants) l'ensemble des solutions est une droite vectorielle et une base est donnée par la suite vérifiant cette relation avec $u_0 = 1$ et c'est exactement la suite précédente : $\left(\frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\boxed{\text{L'ensemble cherché est la droite Vect}\left(\sum_n \tfrac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\frac{x^n}{n!}\right)}$$

Q 15. Attention aux cas particuliers...

- Si a ou b est un entier négatif, la suite $u = \left(\frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n}\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang donc $\boxed{\text{le rayon est infini}}$.
- Sinon, si $x \neq 0$, la suite u ne s'annule par donc pour $n \in \mathbb{N}$, la question 13 donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} = x\frac{(a+n)(b+n}{(n+1)(c+n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
  - Si $|x| < 1$ alors le théorème de d'Alembert montre que $\sum u_n$ converge absolument.
  - Si $|x| > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

  On sait que le rayon de convergence est la borne supérieure de $\{r \in \mathbb{R}^+ / \sum a_n r^n \text{ converge}\}$. Comme on vient de montrer que cet ensemble est $[0,1[$ ou $[0,1]$, c'est que

$$\boxed{\text{le rayon de convergence est 1.}}$$

Q 16. $F_{a,b,c}$ est la somme d'une série entière de rayon 1 ou infini donc par théorème de cours :

$$\boxed{F_{a,b,c} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ (au moins, peut-être plus).}}$$

On sait de plus que l'on peut dériver terme à terme donc pour $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{F'_{a,b,c}(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[a]_{k+1}[b]_{k+1}}{[c]_{k+1}} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a[a+1]_k b[b+1]_k}{c[c+1]_k} \frac{x^k}{k!} = \boxed{\frac{ab}{c} F_{a+1,b+1,c+1}(x)}$$

où l'on a utilisé la question 10.

Q 17. On démontre facilement par récurrence avec la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{F_{a,b,c}^{(n)} = \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n} F_{a+n,b+n,c+n}}$$

On aura pu se donner une idée de la formule en calculant $F''_{a,b,c}$ grâce à la question précédente.

Q 18. Soit $x \in]-1,1[$. $-x^2 \in [0,1[$ donc $F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2)$ a bien un sens et

$$F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\frac{1}{2}]_n[1]_n}{[\frac{3}{2}]_n} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{[\frac{1}{2}]_n}{[\frac{3}{2}]_n} x^{2n} \text{ puisque } [1]_n = n!$$

Puis pour $n \geqslant 1$, $[\frac{1}{2}]_n = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}+1]_{n-1}$ d'après la question 10 donc $\frac{[\frac{1}{2}]_n}{[\frac{3}{2}]_n} = \frac{1}{2}\frac{[\frac{3}{2}]_{n-1}}{[\frac{3}{2}]_n} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}+n-1} = \frac{1}{2n+1}$.
Ainsi, pour $x \neq 0$,

$$\boxed{F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \boxed{\frac{\arctan(x)}{x}}.$$

On peut noter que lorsque x tend vers 0^+, $\frac{\arctan(x)}{x}$ tend vers 1 qui vaut bien $F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(0)$, ce qui est rassurant.

Q 19. Pour x non nul dans $]-1,1[$,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $[1]_n = n!$, $[2]_n = (n+1)!$ donc $\frac{[1]_n[1]_n}{[2]_n} \frac{(-x)^n}{n!} = \frac{(-x)^n}{n+1}$ donc

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x} = F_{1,1,2}(-x)}$$

Q 20. Puisque $-N$ est un entier négatif, $[-N]_n$ est nul pour $n > N$ de sorte que $F_{a,-N,c}$ est polynomiale donc $\boxed{F_{a,-N,c}(1) \text{ existe}}$. Le résultat admis par l'énoncé donne alors

$$F_{a,-N,c}(1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a+N)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+N)} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N} \text{ d'après Q11}$$

Par ailleurs, $F_{a,-N,c}(1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{[a]_k[-N]_k}{[c]_k} \frac{1}{k!}$ et

$$[-N]_k = (-N)(-N+1)\dots(-N+k-1) = (-1)^k N(N-1)\dots(N+1-k) = (-1)^k \frac{N!}{(N-k)!}$$

donc

$$F_{a,-N,c}(1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{[a]_k}{[c]_k}(-1)^k \frac{N!}{(N-k)!k!} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{N}{k} \frac{[a]_k}{[c]_k}$$

ce qui donne bien le résultat :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \binom{N}{k} \frac{[a]_k}{[c]_k} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N}.}$$

Q 21. $c = v - N + 1$ est bien dans D puisque $v \geqslant N$. $c - a = u + v - N + 1$ est également dans D, c'est aussi un entier positif. Ainsi, on peut appliquer la question précédente qui donne, en notant S la somme

$$S = \frac{[u+v-N+1]_N}{[v-N+1]_N} = \frac{(u+v-N+1)\dots(u+v)}{(v-N+1)\dots v} = \frac{(u+v)!(v-N)!}{(u+v-N)!v!} = \frac{\binom{u+v}{N}}{\binom{v}{N}}$$

et pour k entre 0 et n,

$$\frac{[-u]_k}{[v-N+1]_k} = \frac{(-1)^k u(u-1)\dots(u+1-k)}{(v-N+1)\dots(v-N+k)} = \frac{(-1)^k u!(v-N)!}{(u-k)!(v-N+k)!}$$

donc $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{(-1)^k u!(v-N)!}{(u-k)!(v-N+k)!} = \frac{N!(v-N)!}{v!} \sum_{k=0}^{N} \frac{u!}{k!(u-k)!} \frac{v!}{(v-N+k)!(N-k)!}$

$= \displaystyle\frac{1}{\binom{v}{N}} \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}$ ce qui donne bien $\boxed{\displaystyle\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}}$

Q 22. On se donne une urne contenant u boules blanches et v boules noires. Quel est le nombre de manières d'en choisir une poignée de N ?

C'est déjà bien entendu $\binom{u+v}{N}$. Mais choisir N boules parmi toutes les $u + v$ boules c'est aussi

- choisir combien de blanches on prend : un entier k entre 0 et N ;
- choisir ces k boules blanches parmi les u : $\binom{u}{k}$ choix ;
- et choisir enfin les $N - k$ boules noires parmi les v : $\binom{v}{N-k}$ choix.

Au total, on a donc $\sum\limits_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}$ choix.

On a dénombré de deux manières différentes la même situation combinatoire donc les deux résultats sont identiques ce qui redonne bien

$$\boxed{\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k}\binom{v}{N-k}}$$

III.C Fonction hypergéométrique confluente

Q 23. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est $R > 0$. On note alors pour tout $x \in I =]-R, R[$, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. On sait que y est deux fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n x^{n-2}$$

de sorte que : y est solution de $(III.1)$ sur I si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} + (c-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} - a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = 0,$$

ou encore

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} c n u_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a u_n x^n = 0$$

c'est-à-dire (changements d'indice et ajout des termes pour $n = 0$ mais qui sont nuls donc ne changent pas la somme) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n u_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c(n+1)u_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+a)u_n x^n = 0$$

Soit encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)(n+c)u_{n+1} - (n+a)u_n\right)x^n = 0$$

Or une somme de série entière est nulle sur un intervalle non réduit à $\{0\}$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (unicité du développement en série entière pour le sens non trivial). Ainsi :

$$y \text{ est solution de III.1 sur } I \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{(n+1)(n+c)u_{n+1} = (n+a)u_n}$$

Il reste à valider l'hypothèse $R > 0$ mais c'est similaire à ce qui a été fait dans la question 15 avec la règle de d'Alembert. Ainsi, les solutions de $(III.1)$ développables en série entière sont exactement les $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ avec u vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+a}{(n+1)(n+c)}u_n$. Il s'agit donc (comme on l'a fait précédemment)

$$\boxed{\text{d'un espace vectoriel de dimension 1.}}$$

On obtient par récurrence qu'une telle suite vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{[a]_n}{[1]_n[c]_n}u_0$. Ainsi, les solutions de $(III.1)$ développables en série entière sont exactement les

$$\boxed{x \mapsto \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[a]_n}{[c]_n}\frac{x^n}{n!}}\ \text{avec } \alpha \text{ décrivant } \mathbb{R}$$

Il est donc clair que l'on aurait dû chercher les solutions sous la forme $\sum u_n \frac{x^n}{n!}$ plutôt que $\sum u_n x^n$. Ceci nous aurait permis d'appliquer directement les résultats de la partie $III.B$. Mais qui y penserait ? Enfin, remarquons que

$$\boxed{M_{a,c}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[a]_n}{[c]_n}\frac{x^n}{n!}}$$

puisque cette fonction est solution et vaut 1 en 0 ($x^0 = 0! = [a]_0 = [c]_0 = 1$).

IV Les polynômes de Laguerre

Q 24. On trouvera sans génie excessif (mais L_2 et a fortiori L_3 nous incitent à réfléchir et commencent à nous guider vers Leibniz) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{L_0(x) = 1,\ L_1(x) = -x+1,\ L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-4x+2) \text{ et } L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)}$$

Q 25. Tout d'abord, les dérivations successives de $(x \mapsto)\mathrm{e}^{-x}$ (nous ferons la confusion entre fonction et expression) maintiendront en facteur l'expression e^{-x} (qui se simplifiera donc grâce à la multiplication finale) ; ensuite $(x^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ ou encore (mieux) : $(x^n)^{(n-k)} = \dfrac{n!}{k!}x^k$. Ainsi :

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k}$$

Et L_n est bien polynomiale de degré n !

Q 26. C'est assez direct (définition, puis une dérivation) :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \Phi_n^{(n)}(x) = n!L_n(x)\mathrm{e}^{-x} \text{ et } \Phi_n^{(n+1)}(x) = n!\left(L_n'(x) - L_n(x)\right)\mathrm{e}^{-x}.}$$

Q 27. Puisque $\Phi_{n+1}(x) = x\Phi_n(x)$, dériver $n+1$ fois ce produit à la Leibniz ne fera intervenir que deux termes ; ensuite on utilise la question précédente et on fait un peu de ménage. La quantification (pour tout $x \in \mathbb{R}$) est ici implicite, puisqu'il s'agit de travailler sur des fonctions polynomiales plutôt que des polynômes...

— D'une part $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!L_{n+1}(x)\mathrm{e}^{-x}$.

— D'autre part

$$\begin{aligned}
\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) &= (x\Phi_n(x))^{(n+1)} = x\Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\Phi_n^{(n)}(x) \\
&= xn!\left(L_n'(x) - L_n(x)\right)\mathrm{e}^{-x} + (n+1)!L_n(x)\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

On égalise puis divise par $(n+1)!\mathrm{e}^{-x}$ pour obtenir finalement la relation souhaitée :

$$\boxed{L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}L_n'(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x)}$$

Q 28. On calcule à nouveau de deux façons Φ_{n+1}^{n+2} :

— D'une part cela vaut $\left(\Phi_{n+1}^{(n+1)}\right)' = (n+1)!\left(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)\right)\mathrm{e}^{-x}$.

— D'autre part c'est la dérivée $n+1$-ème de $\mathrm{e}^{-x}\left(-x^{n+1} + (n+1)x^n\right)$, c'est-à-dire

$$-(n+1)!L_{n+1}(x)\mathrm{e}^{-x} + (n+1)(n!L_n(x)e^{-x})'$$

On égale ces deux expressions, divise par $(n+1)!\mathrm{e}^{-x}$, et on tombe sur la relation attendue :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x)}$$

Q 29. On combine les deux questions précédentes, en dérivant l'expression obtenue à la question 27 et en égalisant avec celle établie à la question 28 (puis en multipliant par $n+1$) :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.}$$

Q 30. L_n est solution de l'équation (III.1) avec $a = -n$ et $c = 1$, et est bien entendu développable en série entière puisque polynomiale. Or l'ensemble des solutions est d'après la question 23 une droite vectorielle engendrée par $M_{-n,1}$.
Il reste à déterminer le coefficient multiplicatif, en considérant $L_n(0)$ qui vaut 1 (question 25) alors que $M_{-n,1}(0) = 1$.

$$\boxed{L_n = M_{-n,1} \text{ est une fonction hypergémométrique confluente.}}$$

V Loi hypergéométrique

Q31. cf le cours.

$V.A$ Premiers résultats

Q 32. On n'a pas vraiment[1] défini $\mathbb{P}$. Faisons le pari (raisonnable) que l'énoncé veut plutôt nous faire démontrer qu'on est dans le cadre d'application du théorème qui nous raconte que :
Si X est à valeurs dans $\{x_n \,|\, n \in, \mathbb{N}\}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum p_n$ est convergente et de somme égale à 1, alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Bon, ici il s'agit donc de vérifier (puisque la positivité est claire) que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$... ce qui est une conséquence directe (puisque pA et qA sont deux entiers de somme égale à A) de l'identité de Vandermonde établie à la question 21.

$$\boxed{\text{On a bien « défini »une loi de probabilité.}}$$

Q 33. La variable X est à valeurs dans un ensemble fini, donc possède une espérance, et il s'agit de calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k\frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}$.

On factorise bien entendu le dénominateur, on utilise la relation $k\binom{pA}{k} = pA\binom{pA-1}{k-1}$ et ensuite (après un changement d'indice) on voit apparaître à nouveau l'identité de Vandermonde :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{pA}{\binom{A}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{pA-1}{k-1}\binom{qA}{n-k} = \frac{pA}{\binom{A}{n}}\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\binom{pA-1}{i}\binom{qA}{n-1-i}}_{=\binom{pA+qA-1}{n-1}=\binom{A-1}{n-1}} = pA\frac{\frac{(A-1)!}{(n-1)!(A-n)!}}{\frac{A!}{n!(A-n)!}}$$

soit après simplifications :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

Q 34. On s'intéresse (pour $t \in]-1, 1[$ – au moins !) à

$$\mathcal{G}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X = k)t^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}t^k$$

Pour relier $P(X = k+1)$ et $P(X = k)$, on va utiliser les relations $i\binom{j}{i} = (j-i-1)\binom{j}{i-1}$ pour écrire d'une part $(k+1)\binom{pA}{k+1} = (pA-k)\binom{pA}{k}$ et d'autre part $(qA-n+k+1)\binom{qa}{n-(k+1)} = (n-k)\binom{qA}{n-q}$, ce qui donne :

$$(k+1)(qA-n+k+1)\mathbb{P}(X = k+1) = (pA-k)(n-k)\mathbb{P}(X = k)$$

Il reste à poser $P = (pA-X)(n-X) = (X-n)(X-pA)$ et $Q = (X+1)(X+1+qA-n)$ et revenir aux questions 13 et 14 (avec $a = -n$, $b = -pA$ et $c = 1+qA-n$) : $\mathcal{G}_X$ est dans la droite vectorielle engendrée par $F_{-n,-pA,1+qA-n}$, et on détermine ce qui nous manque en évaluant en 0.

$$\boxed{\mathcal{G}_X \text{ est hypergéométrique, avec plus précisément } \mathcal{G}_X = \frac{\binom{qA}{n}}{\binom{A}{n}}F_{-n,-pA,1+qA-n}.}$$

$V.B$ Modélisation

Q 35. La variable Z compte le nombre de succès dans n expériences de Bernoulli **indépendantes** de même paramètre $\frac{pA}{A} = p$, donc :

1. Pas du tout en fait !

$$\boxed{Z \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(n,p)\,;\text{ en particulier } \mathbb{E}(Z)=np \text{ et } \mathrm{Var}(Z)=npq.}$$

Q 36. Bien entendu, $P(Y=k)=0$ si $k\notin [\![0,n]\!]$. On fixe maintenant $k\in[\![0,n]\!]$ et on veut évaluer $\mathbb{P}(Y=k)$.
Il s'agit ici de probabilités « à l'ancienne », où on dénombre d'une part le cardinal de l'univers Ω constitué des parties à n éléments d'un ensemble de cardinal A – c'est $\binom{A}{n}$ – et d'autre part les configurations gagnantes : pour constituer une partie à exactement k boules blanches on peut choisir d'une part une partie à k éléments parmi les pA boules blanches et de façon indépendante une partie à $n-k$ éléments parmi les $A-pA=qA$ boules noires, ce qui donne $\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}$ possibilités, et finalement : $\mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}}$

$$\boxed{Y \text{ suit la loi hypergéométrique } \mathcal{H}(n,p,A).}$$

V.C Calcul de l'espérance

Q 37. Bien entendu (situation standard où on calcule un cardinal en plaçant 1 sur chaque habitant de l'ensemble...) :

$$\boxed{Y=\sum_{i=1}^{pA} Y_n}$$

Par linéarité de la somme, il suffit de calculer l'espérance de chaque Y_i, c'est-à-dire (pour ces variables de Bernoulli) évaluer $\mathbb{P}(Y_i=1)$. Mais cette probabilité vaut $\dfrac{\binom{A-1}{n-1}}{\binom{A}{n}}$ (construire une partie à n éléments contenant i revient à construire la partie des $n-1$ autres éléments que i, parmi les $n-1$ qui restent) ; ainsi $\mathbb{E}(Y_i)=\dfrac{n}{A}$, et donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y)=\sum_{i=1}^{pA}\mathbb{E}(Y_i)=pA\frac{n}{A}=np=\mathbb{E}(Z)}$$

Il n'est pas déraisonnable que ces deux espérances soient égales... sans que ce soit évident avant calcul !

Q 38. Fixons i et j tels que $0\leqslant i<j\leqslant pA$: la variable aléatoire Y_iY_j est à valeurs dans $\{0,1\}$, donc suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_iY_j=1)$, qu'on évalue à nouveau par dénombrement : avec encore $|\Omega|=\binom{A}{n}$, on cherche maintenant à dénombrer les parties à n éléments d'un ensemble à A éléments contenant deux éléments imposés, ce qui revient à choisir les $n-2$ autres parmi les $A-2$ qui restent :

$$\boxed{\text{Le paramètre de la Bernoulli } Y_iY_j \text{ vaut } \mathbb{P}(Y_iY_j=1)=\frac{\binom{A-2}{n-2}}{\binom{A}{n}}=\frac{n(n-1)}{A(A-1)}.}$$

V.D Résultats asymptotiques

Q 39. On nous fait montrer quelque chose qui ressemble à l'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson... et la technique sera la même : il s'agit de noter que quand A tend vers $+\infty$, $\dfrac{pA!}{(pA-k)!}$ peut être vu comme un polynôme en A, équivalent à $(pA)^k$; et de même $\dfrac{(qA)!}{(qA-n+k)!}\sim(qA)^{n-k}$

et $\dfrac{(A)!}{(A-n)!} \sim A^n$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \frac{\binom{pA}{k}\binom{qA}{n-k}}{\binom{A}{n}} = \frac{(pA)!}{k!(pA-k)!}\,\frac{(qA)!}{(n-k)!(qA-n+k)!}\,\frac{n!(A-n)!}{A!} \\
&\sim \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(pA)^k(qA)^{n-k}}{A^n} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k},
\end{aligned}$$

et ainsi (l'équivalent étant une constante) :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \mathbb{P}(Z=k)}$$

On dit que la suite de variables $(Y_A)_{A\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Z. Enfin, en faisant comme si tous les pA et qA étaient entiers, ce qui est une hypothèse audacieuse !

Q 40. Puisque les (Y_A) convergent en loi (« simplement ») vers Z, on peut raisonnablement espérer que l'espérance et la variance des Y_A convergent respectivement vers l'espérance et la variance de Z, et c'est bien ce qu'on a établi par les différents calculs effectués.

Ce résultat est faux en général, mais est vrai sous des conditions raisonnables concernant les lois en jeu. Ici, les lois sont toutes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, avec n fixé, et on prouve donc la convergence des moments par une simple linéarité de limites (les sommes sont finies).