Programme de colles S8

Du 24 – 11 au 29 – 11

Réduction

I ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME OU D'UNE MATRICE CARRÉE

1. **Définitions**
2. **Premières propriétés**
3. **En dimension finie, liens entre éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice relativement à une base.**

II DIAGONALISATION

1. **Diagonalisablité**

   Définition d'une matrice diagonalisable, d'un endomorphisme diagonalisable (en dimension finie).

   Un endomorphisme f est diagonalisable ssi il existe une base de l'espace formée de vecteurs propres de f ; traduction matricielle de ce résultat.

2. **Théorème fondamental**

   Les sous – espaces propres sont en somme directe.

3. **Corollaires**

   - Toute famille obtenue par concaténation de bases (de familles libres) de sous – espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, est libre.
   - En dimension finie n, un endomorphisme admet au plus n valeurs propres, et la somme des dimensions des sous – espaces propres est inférieure ou égale à n.
   - En dimension finie, l'endomorphisme f de E est diagonalisable ssi $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} E_\lambda(f) = E$, ou encore ssi $\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = \dim(E)$.

     Cas particuliers : En dimension n, tout endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, et ses sous – espaces propres sont de dimension 1. Un endomorphisme ayant une unique valeur propre distinctes n'est pas diagonalisable, sauf si c'est une homothétie.

   Traductions matricielles.

4. **Quelques aspects matriciels**

   Valeurs propres d'une matrice triangulaire

5. **Éléments propres d'endomorphismes particuliers**

   Homothéties, projecteurs, symétries, endomorphismes nilpotents.

III POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

1. **Définition**

   Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

   Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est égal à celui de sa matrice relativement à toute base de l'espace.

   Conséquence : deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (réciproque fausse).

2. **Spectre, et racines du polynômes caractéristique**

   Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

   Définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre. La dimension d'un sous – espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante. Cas des valeurs propres simples.

3. **Polynôme caractéristique d'une matrice transposée**
4. **Quelques propriétés du polynôme caractéristique**

   En dimension n : degré, coefficients de degré 0, n et $n - 1$. Exemples en petites dimensions
5. **Polynômes caractéristiques scindés**

   Rappels de définitions. Rappel du théorème de d'Alembert – Gauss.

   Toute matrice complexe, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension finie non nulle, admet au moins une valeur propre.

   Déterminant et trace lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

   Cas d'un polynôme caractéristique scindé à racines simples.

   Un endomorphisme en dimension finie est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé, et la dimension de tout sous – espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

IV POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES OU DE MATRICES CARRÉES

1. **Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées**
2. **Polynômes annulateurs**

   Définition. Toute matrice carrée, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, possède un polynôme annulateur (non nul). Premières applications :

   au calcul des puissances n – ièmes d'une racine carrée, ou aux itérées d'un endomorphisme ;

   lorsque $P\left(0\right) \neq 0$, à la détermination de l'inverse.

   Si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P (réciproque fausse).

   Critère de l'annulateur scindé à racines simples.

   Théorème de Cayley –Hamilton (preuve non exigible, mais à avoir travaillé).

V SOUS – ESPACES STABLES ET RÉDUCTION PAR BLOCS

1. **Sous – espaces stables**

   Définition. Exemples de base : noyau, une image, un sous – espace propre, $\operatorname{Ker}\left(P\left(u\right)\right)$, sont stables par u.

   Une droite vectoriel est u – stable si et seulement si ses générateurs sont des vecteurs propres de u.
2. **Stabilité et réduction par blocs**

   Effet de la stabilité d'un sous – espace sur la matrice de u dans une base adaptée.

   Effet, sur la matrice de u dans une base adaptée, d'une décomposition de l'espace en somme directe de sous – espaces stables.
3. **Endomorphismes induits**

   Définition (rappel). Dans des bases adaptées, la matrice d'un endomorphisme induit est un bloc de la matrice de l'endomorphisme. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise celui de l'endomorphisme.

   Si u est diagonalisable, tout endomorphisme induit par u sur un sous – espace stable l'est aussi.

VI TRIGONALISATION

1. **La définition**
2. **Un critère de trigonalisabilité**

   Une matrice carrée, un endomorphisme en dimension finie, est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. *Preuve non exigible, faite à titre d'exercice.* Corollaire : cas complexe.
3. **Polynômes annulateurs et trigonalisabilité**

   Une matrice carrée, un endomorphisme en dimension finie, est trigonalisable si et seulement elle (il) possède un polynôme annulateur scindé.

Des questions de cours possibles

Même si le programme évolue, celles de la semaine précédente restent d'actualité.

- Pour $E_1, \ldots, E_n$ sev de E : La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe si et seulement si :

$$\forall \left(x_1, \ldots, x_n \right) \in \prod_{i=1}^{n} E_i, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

- Pour $E_1, \ldots, E_n$ sev de dimension finie de E : $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim \left(E_i \right)$, et les E_i sont en somme directe si et seulement si $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim \left(E_i \right)$.
- Polynômes interpolateurs de Lagrange : définition, basicité, écriture d'un polynôme dans une base de Lagrange, cas particulier du polynôme constant égal à 1 .
- Polynômes d'endomorphismes ou de matrices carrées. Polynômes annulateurs. En dimension finie, existence de polynômes annulateurs (non nuls).
- Déterminants de Vandermonde (démonstration à connaître).
- Déterminants triangulaires par blocs (idem).
- Les sous – espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.
- Si u est diagonalisable, tout endomorphisme induit par u sur un sous – espace stable l'est aussi.
- La multiplicité d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension du sep correspondant.
- Théorème de Cayley Hamilton (en donnant des étapes).

La semaine d'après

Même programme (avec quelques détails de plus).