PC - Lakanal

2025- 2026

Programme de colles S.10

Du 08 – 12 au 12 – 12

Dénombrement (rappels de première année)

I. Rappels de théorie des ensembles

Injections, surjections, bijections. Ensembles finis ou dénombrables. Propriétés des ensembles finis.

La formule du crible n'est pas au programme, mais il faut savoir la retrouver, et surtout pouvoir l'écrire à de petits rangs.

II. Principes du dénombrement

Applications des résultats précédents au dénombrement.

III. p – listes, p – arrangements, p – combinaisons d'un ensemble à n éléments

Propriétés, modèles usuels. Cas des permutations.

Propriétés des coefficients binomiaux : formules de Pascal, du binôme, etc. Les formules de Vandermonde et de Pascal généralisée sont hors programme, mais doivent pouvoir être démontrées.

Espaces probabilisés

I. Espaces probabilisables

Ensembles finis, ensembles dénombrables. Tribu (ou σ – algèbre), espace probabilisable. Vocabulaire : univers, évènement, évènement contraire, évènement impossible. Propriétés de base des tribus.

II. Espaces probabilisés finis

Mesure de probabilité sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$, Ω fini non vide, + propriétés : rappels de première année.

III. Espaces probabilisés quelconques

Mesure de probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Vocabulaire : événements quasi – impossibles, quasi – certains, propriété vraie presque sûrement, etc.

Premières propriétés : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$, croissance pour l'inclusion, formule des quatre cardinaux pour les mesures de probabilité.

Caractérisation d'une probabilité sur un univers dénombrable :

Soient Ω un univers dénombrable, $\Omega = \left\{\omega_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$, et $\left(p_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels

tels que $\left\{\begin{array}{ll} \bullet & \forall\, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq p_k \ (\leq 1) \\ \bullet\bullet & \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \end{array}\right.$. Alors :

- il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\right)$ telle que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega_k\right\}\right) = p_k$.

•• $\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ \omega_k \in A}}^{+\infty} p_k$.

IV. Systèmes complets ou quasi – complets d'événements

Définitions.

Propriété : si $\left(A_i \right)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi – complet d'événements, alors pour tout événement A,

$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \cap A \right)$ converge, et $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \cap A \right) = \mathbb{P}(A)$.

Inégalité de Boole :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé, soit $\left(A_i \right)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de $\mathcal{T}$. Alors si $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_i \right)$

converge : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i \right)$.

V. Théorèmes de continuité (ou de limite monotone) pour une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Pour toute suite $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$, on a :

- $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n \right).$$

•• $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n \right).$$

Cas d'une suite croissante ou décroissante au sens de l'inclusion.

VI. Probabilités conditionnelles

Définition. Propriété : $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Conséquences immédiates.

VII. Indépendance

Indépendance de deux évènements ; caractérisation via les probas conditionnelles ; A et B sont indépendants ssi A et $\overline{A}$ le sont.

Indépendance mutuelle d'une famille d'évènements. L'indépendance deux à deux ne sert pas à grand – chose, et n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

VIII. Les trois formules reines des probabilités

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Dans cette formule, on adopte la convention moche mais pratique, imposée par le programme :

on convient ici de poser $\mathbb{P}_{A_i}(B)\, \mathbb{P}\left(A_i \right) = 0$ lorsque A_i est négligeable.

Formule de Bayes.

La semaine suivante

Espaces probabilisés (avec plus de pratique)