



Séries entières

I SÉRIES ENTIÈRES : DÉFINITION, CONVERGENCE

1. Définition

2. Convergence d'une série entière

- Lemme d'Abel ; rappel sur la règle de d'Alembert
- Rayon de convergence, disque ouvert ou intervalle ouvert de convergence

L'étude aux bornes du domaine de convergence "n'est pas un objectif du programme".

Propriétés de base : si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R :

Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est telle que $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors le rayon de convergence de cette série entière vérifie

$R \geq |z_0|$. Si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, $R \leq |z_0|$. Si $a_n = O(n^\alpha b_n)$, le rayon de convergence de

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, etc.

3. Opérations algébriques

II DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE USUELS

III RÉGULARITÉ D'UNE SOMME DE SÉRIE ENTIÈRE

1. Convergence normale sur tout compact du domaine ouvert de convergence

Corollaire : continuité de la fonction somme sur le disque ouvert, ou l'intervalle ouvert, de convergence.

2. Développement limité

Corollaire 1: unicité, sous réserve d'existence, du développement en série entière.

Corollaire 2 : développement en série entière d'une fonction paire ou impaire.

Pour des séries entières d'une variable réelle :

3. Intégration terme à terme et primitivation

4. Dérivation terme à terme - généralisation à une dérivée p - ème.

IV SÉRIES DE TAYLOR

0. Formule de Taylor avec reste intégral.

- Définition de la série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0.
- Si f est développable en série entière en 0, alors son développement est sa série de Taylor. En revanche, la série de Taylor de f en 0 peut être de rayon de convergence non nul, sans que f ne soit développable en série (contre-exemple à connaître).
- Utilisation de formules de Taylor avec reste intégral pour prouver une développabilité en série entière.

Questions de cours fléchées (*toutes avec preuves demandées bien sûr*).

1. Formule de Taylor avec reste intégral (avec preuve).
2. Lemme d'Abel.
3. Règle de D'Alembert pour les séries entières.
4. DSE de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ (on a insisté sur $\alpha \notin \mathbb{N}$ pour avoir le rayon de convergence 1 ; mais on a compris que pour $\alpha \in \mathbb{N}$ c'est juste la formule du binôme).
5. Caractère C^∞ d'une fonction somme de série entière d'une variable réelle, sur son intervalle ouvert de convergence.
6. DSE de $z \mapsto \exp(z)$ (cas réel via étude de $t \mapsto \exp(t)$, cas complexe en considérant $t \mapsto \exp(t e^{i\theta})$).
7. DSE des dérivées formelles successives de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (via étude de $t \mapsto \frac{1}{1-t e^{i\theta}}$, t variable réelle).

Prévisions pour la semaine suivante : variables aléatoires (début)