

I Bases orthonormées

1. Espaces euclidiens

Rappelons qu'un **espace euclidien** $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ n'est rien d'autre qu'un espace préhilbertien de dimension finie.

En conséquence, tout ce qui a été raconté dans le chapitre précédent sur les espaces préhilbertiens reste d'actualité...

2. Procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt (*rappel*)

a. Proposition 1 (Gram – Schmidt)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $p \in \{1, \dots, n\}$, et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille **libre** de vecteurs de E .

Soit $\mathcal{G} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la famille de vecteurs définie par :

$$\circ \quad \varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \text{ et}$$

$$\circ \circ \quad \forall k \in \{2, \dots, p\}, \varepsilon_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i | e_k \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i | e_k \rangle \varepsilon_i \right\|}.$$

Alors $\mathcal{G}$ est une famille orthonormale de E , vérifiant :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect} \left((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \right) = \text{Vect} \left((e_1, \dots, e_k) \right).$$

Elle est dite déduite de $\mathcal{F}$ par le **procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt**.

Remarques

- On verra une **interprétation géométrique** de ce procédé en termes de **projections orthogonales**.
- Le procédé de Gram – Schmidt ne modifie pas une famille déjà orthonormale.
- Il y a unicité de l'orthonormalisée de Gram – Schmidt si l'on impose que $\langle \varepsilon_k | e_k \rangle > 0$, ou que, dans la

décomposition $\varepsilon_k = a_k e_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j e_j$, a_k est positif.

Preuve (*rappel, également...*)

On procède par récurrence sur p , l'hypothèse de récurrence étant : les relations machin et truc permettent de définir

une famille ; celle – ci est orthonormée, et vérifie :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_k) \rangle.$$

Pour $p = 1$, c'est évident. Supposons maintenant la propriété vraie à un rang $p \in \{1, \dots, n - 1\}$, et considérons une famille libre $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ de $p + 1$ vecteurs de E .

$$\bullet \text{ Par hypothèse de récurrence, la famille } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \text{ donnée par } \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \\ \forall k \in \{2, \dots, p\}, \varepsilon_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i | e_k \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_i | e_k \rangle \varepsilon_i \right\|} \end{cases}$$

est bien définie, et vérifie : $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_k) \rangle$.

$$\bullet \text{ Comme } (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}), e_{p+1} \notin \text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_p) \rangle; e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i$$

$$\text{est donc non nul, et il en résulte que } \varepsilon_{p+1} = \frac{e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|} \text{ est bien défini ; en outre, ce vecteur est}$$

$$\text{évidemment normé. De plus, pour tout } k \in \{1, \dots, p\}, \langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_k \rangle = \frac{\langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle - \sum_{i=1}^p \overline{\langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle}{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|},$$

$$\text{d'où, puisque } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \text{ est orthonormée, } \langle \varepsilon_{p+1}, \varepsilon_k \rangle = \frac{\langle e_{p+1}, \varepsilon_k \rangle - \overline{\langle \varepsilon_k | e_{p+1} \rangle} \langle \varepsilon_k, \varepsilon_k \rangle}{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|} = 0.$$

Ainsi, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$ est orthonormée ; ceci achève la récurrence, et la démonstration.

b. Existence et complétion de bases orthonormales

Corollaire 1 (Schmidt)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Alors $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ admet (au moins) une base orthonormale.

Preuve

Si $n = 0$, $\emptyset$ est une base orthonormée de E . Supposons désormais $n \geq 1$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (il en existe !). La famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ déduite de $\mathcal{B}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt est orthonormée, donc libre. Comme elle est formée de n vecteurs, c'est une base orthonormée de cet espace.

Remarque

Notons que, de plus, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est **triangulaire supérieure**, à coefficients diagonaux strictement positifs.

Proposition 2 (complétion d'une base orthonormale)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

Toute famille orthonormale $\mathcal{F}$ de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E .

Preuve

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de vecteurs de E .

- Si $p = n$

$\mathcal{F}$ est une base orthonormale pour des raisons de cardinalité, cf. ci-dessus.

- Si $p < n$

$\mathcal{F}$ est orthonormale, donc libre. Le théorème de la base incomplète permet de compléter cette famille en une base

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E . Rappelons que **le procédé de Gram - Schmidt ne modifie pas une**

famille déjà orthonormale, donc la famille $\mathcal{G} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ déduite de la famille libre $\mathcal{B}$ par ce procédé est en

fait $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$. Enfin, troisième fois que nous tenons ce raisonnement, $\mathcal{G}$ est orthonormée

donc libre, de cardinal n dans un espace de dimension n , donc c'est une base. Et comme elle est orthonormale,

c'est une base orthonormale de E . On a bien complété la famille orthonormale $\mathcal{F}$ en une base orthonormale de E .

3. Travail en base orthonormale

Résumé... Principales propriétés essentielles à connaître lorsque l'on est en b.o.n.

Proposition 1 (travail en base orthonormale)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\| \cdot \|$ la norme euclidienne

associée, et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in 1, n}$ une **base orthonormale** de E .

Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ deux vecteurs de E , $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ leurs matrices

de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{F} = (\varepsilon_i)_{i \in 1, n}$ une famille de n vecteurs de E , et soit, pour

tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice des coordonnées de ε_i dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

- $x = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle e_k$, i.e. : $\forall i \in 1, n$, $x_i = \langle e_i | x \rangle$.

- $\langle x | y \rangle = X^T \cdot Y = Y^T \cdot X = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

- $\|x\| = \sqrt{X^T \cdot X} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

- $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E si et seulement si $(X_1, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire canonique).

Proposition 2 (matrice d'un endomorphisme en base orthonormale)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée, et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une **base orthonormale** de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E , et $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Alors pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$: $a_{i,j} = \langle e_i | f(e_j) \rangle$.

4. Supplémentaire orthogonal

Rappelons le résultat suivant (établi dans le chapitre espaces préhilbertiens) :

Théorème

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous – espace vectoriel **de dimension finie** de E .

Alors,

- $F \oplus F^\perp = E$.
- $(F^\perp)^\perp = F$.



Rappelons également qu'on dit alors que $F^\perp$ est **le** supplémentaire orthogonal de F dans E ...

En particulier :

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace **euclidien**, et F un sous – espace vectoriel de E . Alors $F \oplus F^\perp = E$.

Par conséquent

$$\dim F + \dim (F^\perp) = \dim E.$$

Corollaire 1

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F un sous – espace vectoriel de E , $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F , et $\mathcal{B}'$ une base orthonormée de $F^\perp$.

Alors leur **concaténée** $\mathcal{B} \amalg \mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E .

Preuve

On sait que F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux dans E , ils sont donc supplémentaires tout court dans cet espace. Par conséquent, $\mathcal{B} \amalg \mathcal{B}'$ est bien une base de E , et de plus on peut poser $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, et

$\mathcal{B}' = (e_{p+1}, \dots, e_n)$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \text{ car les } e_k \text{ sont tous normés} \\ 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, p\} \text{ et } j \in \{p+1, \dots, n\}, \text{ car } F \text{ et } F^\perp \text{ sont orthogonaux} \\ 0 & \text{si } i \in \{p+1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{1, \dots, p\}, \text{ pour la même raison} \\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ appartiennent à } \{1, \dots, p\} \text{ et sont distincts, car } \mathcal{B} \text{ est orthogonale} \\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ appartiennent à } \{p+1, \dots, n\} \text{ et sont distincts, car } \mathcal{B}' \text{ l'est aussi} \end{cases}.$$

On a fait le tour : $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E . $\square$

Corollaire 2

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F un sous-espace vectoriel de E , et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F . Si on complète cette famille libre en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E grâce au théorème de complétion des familles orthonormées, alors la famille $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

En particulier :

$$F^\perp = \text{Vect} \langle (e_{p+1}, \dots, e_n) \rangle.$$

Preuve

$\text{Vect} \langle (e_{p+1}, \dots, e_n) \rangle$ est supplémentaire de F , et lui est évidemment orthogonal. Donc

$\text{Vect} \langle (e_{p+1}, \dots, e_n) \rangle = F^\perp$, et plus précisément $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de $F^\perp$. C'est une famille orthonormée comme sous-famille d'une famille l'étant, d'où le résultat. $\square$

Théorème

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E .

Alors : $F \perp G \Leftrightarrow F^\perp = G \Leftrightarrow G^\perp = F$.

Preuve

Par définition de l'orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels, on a $F \perp G \Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$. Mais

$F \oplus G = E$, donc $\dim F = \dim E - \dim G = \dim(G^\perp)$, d'où $F \subset G^\perp \Leftrightarrow F = G^\perp$, et le résultat.

Remarque

On a vu, en dimension quelconque, l'**unicité**, sous réserve d'existence, du supplémentaire orthogonal : le seul supplémentaire orthogonal de F , s'il existe, est $F^\perp$. En dimension finie, il y a **existence et unicité**.

Définition – bilan (supplémentaire orthogonal)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et F un sous-espace vectoriel de E .

Alors $F^\perp$ est **LE supplémentaire orthogonal** de F dans E .

C'est l'**unique** supplémentaire de F orthogonal à F . On note $F \oplus F^\perp = E$.

II – Isométries, matrices orthogonales

1. Isométries

a. Automorphismes orthogonaux ou isométries

Définition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et f un endomorphisme de E .

On dit que f est une **isométrie**, ou **automorphisme orthogonal**, lorsqu'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Remarque

On verra sous peu que toute isométrie est bijective. C'est pourquoi on parle d'**automorphisme** orthogonal.

Proposition 1

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i** – f est une isométrie.
- ii** – L'image de $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ de $\mathcal{B}$ par f est une base orthonormée de E .
- iii** – Pour toute base orthonormée $\mathcal{F}$ de E , $f(\mathcal{F})$ est encore une base orthonormée de E .

Preuve

En changeant quelque peu le sens de l'habituel circuit, montrons que $i_- \Rightarrow iii_-$, $iii_- \Rightarrow ii_-$, et $ii_- \Rightarrow i_-$.

$i_- \Rightarrow iii_-$: supposons que f est une isométrie. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$, et en particulier, pour toute base orthonormée $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle f(\varepsilon_i) | f(\varepsilon_j) \rangle = \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

C'est dire que la famille $f(\mathcal{F})$ est une famille orthonormée. Formée de n vecteurs, c'est alors une b.o.n. de cet espace.

$iii_- \Rightarrow ii_-$: parfaitement évident.

$ii_- \Rightarrow i_-$: supposons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E . Considérons deux vecteurs x et y de

E , que l'on écrit dans la base $\mathcal{B}$, sous la forme : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Alors

$$\begin{aligned} \langle f(x) | f(y) \rangle &= \left\langle f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \middle| f\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \middle| \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i) | f(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{car } (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est orthonormée} \\ &= \langle x | y \rangle, \quad \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ itou.} \end{aligned}$$

f conserve donc le produit scalaire : c'est un automorphisme orthogonal. □

Proposition 2

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et f un endomorphisme de E .

Alors, f est une isométrie si et seulement si il conserve la norme, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$$

Preuve

Si f est un automorphisme orthogonal, alors pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x) | f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \|x\|$, et f conserve la norme.

Réciproquement, si f conserve la norme, une identité de polarisation donne :

$$\begin{aligned} \langle f(x) | f(y) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) = \langle x | y \rangle, \end{aligned}$$

ce qui assure que f est un automorphisme orthogonal.

b. Groupe orthogonal d'un espace euclidien

Proposition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit f une isométrie de E . Alors,

- f est un automorphisme de E .
- Son application inverse f^{-1} est également une isométrie de E .

Preuve

- Pour tout $x \in E$, $f(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, f est donc injectif. Comme c'est un endomorphisme en dimension finie, il est alors bijectif.
- Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$, soit : $\|f(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\|$. Comme f conserve la norme, ceci entraîne que $\|x\| = \|f^{-1}(x)\|$: f^{-1} conserve lui aussi la norme, c'est donc un automorphisme orthogonal de E .

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Alors, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est inclus dans $\mathcal{GL}(E)$, non vide, stable par composition, et par passage à l'endomorphisme inverse : c'est ce qu'on appelle un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$. Ce sous-groupe est appelé groupe orthogonal de E , et il est noté $\mathcal{O}(E)$.

Preuve

$\mathcal{O}(E)$ est inclus dans $\mathcal{GL}(E)$ d'après la proposition précédente, et il est non vide, car l'endomorphisme identité de E est clairement orthogonal.

Soit $(f, g) \in (\mathcal{O}(E))^2$. Alors g^{-1} existe, et, de par la proposition précédente à nouveau, c'est un endomorphisme orthogonal. Il en résulte que pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\|f \circ g^{-1}(x)\| &= \|g^{-1}(x)\| & f \text{ conserve la norme} \\ &= \|x\| & g^{-1} \text{ aussi.}\end{aligned}$$

$f \circ g^{-1}$ conserve la norme, c'est donc un élément de $\mathcal{O}(E)$. $\square$

2. Matrices orthogonales ; groupe orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \right) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est orthogonal.

Proposition (caractérisation des matrices orthogonales)

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \right) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes.

- i* – A est une matrice orthogonale.
- ii* – Les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- iii* – $A^T \cdot A = I_n$.
- iv* – $A \cdot A^T = I_n$.
- v* – Les lignes $L_1, \dots, L_n$ de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

On prendra garde au décalage de vocabulaire : A est ortho**gonale** si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est ortho**normale** ; un endomorphisme est ortho**gonal** si et seulement si il transforme une base ortho**normale** en base ortho**normale**.

Preuve

Pour des matrices carrées, l'équivalence $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$ est connue, et elle assure déjà que *iii* $\Leftrightarrow$ *iv*.

D'autre part, A est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est orthogonal. En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$, f est orthogonale si et seulement si

$(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est orthonormée, donc si et seulement si les matrices colonnes des coordonnées de

$f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Mais les colonnes de A sont justement ces matrices de coordonnées, on a donc fait le tour : *i* $\Leftrightarrow$ *ii*.

Reste à prouver que *ii* $\Leftrightarrow$ *iii*, et ce n'est pas bien dur. Avec les notations habituelles,

$$\begin{aligned}
((C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) &\Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{i,j}) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} = \delta_{i,j} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} A_{k,j} = \delta_{i,j} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (A^T A)_{i,j} = \delta_{i,j} \right) \\
&\Leftrightarrow A^T A = I_n \quad \square
\end{aligned}$$

Enfin, v_- est équivalente à toutes les autres propositions, car iii_- et iii_+ assurent que A est orthogonale si et seulement si sa transposée l'est.

Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors, $(A \text{ est orthogonale}) \Leftrightarrow (A \text{ est inversible et son inverse est sa transposée})$

Preuve

D'après la proposition précédente, A est orthogonale si et seulement si $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$. $\square$

Proposition – définition (groupe orthogonal matriciel)

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé **groupe orthogonal d'ordre n** , et on le note $\mathcal{O}(n)$.

3. Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales, et bases orthonormées

On a vu qu'une matrice carrée est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est orthogonal. On se propose ici de généraliser ce résultat.

Théorème 1 (nouvelles caractérisations des matrices orthogonales)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$

une **base orthonormale** de E .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- P est orthogonale, i.e. $P \in \mathcal{O}(n)$.
- Les vecteurs colonnes de P constituent une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.
- Les vecteurs lignes de P constituent une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.
- Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de E telle que P soit la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ de la b.o.n. $\mathcal{B}$ à la b.o.n. $\mathcal{B}'$.

Autrement dit, toute matrice orthogonale peut être considérée comme la matrice de passage d'une base orthonormale (au besoin fixée à l'avance) à une autre base orthonormale, dans un espace euclidien (au besoin fixé à l'avance)... et d'un autre côté, toute matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale ; ce qui, on va le voir, faciliter grandement les changements de bases correspondants...

Preuve

- $\Leftrightarrow$ •• a déjà été démontré.
- $\Leftrightarrow$ • Les vecteurs lignes de P sont les vecteurs colonnes de P^T , et l'on a montré avant que $P \in \mathcal{O}(n) \Leftrightarrow P^T P = I_n$; par conséquent,

$$P \in \mathcal{O}(n) \Leftrightarrow P^T \cdot (P^T)^T = I_n \Leftrightarrow P^T \in \mathcal{O}(n),$$
 d'où l'équivalence entre • et •••.
- $\Leftrightarrow$ •••• Les colonnes de P sont les matrices des coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$ de E , des vecteurs $f(e_i)$.
 Dire que les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ revient donc à dire que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E (Cf. la proposition « travail en base orthonormale » du I.3., point ••••). Et dire que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E , c'est dire que f est un endomorphisme orthogonal de E . □

Théorème 2 (nouvelles caractérisations des isométries)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un ev. euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une **base orthonormale** de E .
 Alors f est une isométrie de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale.

Proposition (formules de changement de base entre deux bases orthonormales)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E . Soit enfin $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors

- (formule de changement de base pour les vecteurs)
 Pour tout $x \in E$, les matrices colonnes $[x]_{\mathcal{B}}$ et $[x]_{\mathcal{B}'}$, des coordonnées de x relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont liées par la relation : $[x]_{\mathcal{B}'} = P^T [x]_{\mathcal{B}}$.
- (formule de changement de base pour les endomorphismes)
 Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$: $M_{\mathcal{B}'}(f) = P^T M_{\mathcal{B}}(f) P$.

Preuve

Les formules de changement de base vues en première année donnent : $\forall x \in E, [x]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [x]_{\mathcal{B}}$, et $\forall f \in \mathcal{L}(E), M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P$. Puisqu'ici P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, elle est orthogonale : $P^{-1} = P^T$, et les résultats s'en déduisent.

4. Déterminant d'une isométrie, d'une matrice orthogonal(e)

Proposition (déterminant d'iceux)

Toute isométrie d'un espace euclidien, toute matrice carrée orthogonale, est de déterminant ± 1 .

Preuve

En dimension finie, un endomorphisme a même déterminant que sa matrice relativement à toute base de l'espace ; lorsque l'espace est euclidien, l'endomorphisme une isométrie, et la base orthonormée, ladite matrice est orthogonale.

Il suffit donc de prouver le résultat pour les matrices orthogonales.

Or, pour toute matrice orthogonale M , on a à la fois $\det M = \det M^T$ et $M M^T = I_n$, d'où $\det M \cdot \det M^T = 1$.

Il en résulte que $(\det M)^2 = 1$, on a donc bien $\det M \in \{-1; 1\}$. □

Définition – proposition (Groupe spécial orthogonal matriciel)

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n et de déterminant égal à 1 est non vide, stable par produit matriciel et par passage à l'inverse. On l'appelle groupe spécial orthogonal d'ordre n , et on le note $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

5. Stabilité et éléments de réduction

Proposition 1

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un ev. euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et f une isométrie de E .

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f .

Alors, $F^\perp$ est stable par f .

Proposition 2

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un ev. euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et f une isométrie de E .

Alors, les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1 , ie. $\text{Spec}(f) \subset \{-1, 1\}$

III Endomorphismes et matrices symétriques réels

1. Définitions et propriétés immédiates

Définition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

On dit que f est **autoadjoint** ou **symétrique** si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle.$$

Proposition 1

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Alors, l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

Preuve

A supposer que ça en mérite une... notons S_E l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

- S_E est non vide, car, par exemple, l'endomorphisme nul est autoadjoint, il appartient de ce fait à S_E .
- Soient f, g deux éléments de S_E , et λ un scalaire. Posons $h = \lambda f + g$.

Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned} \langle h(x) | y \rangle &= \langle (\lambda f + g)(x) | y \rangle \\ &= \lambda \langle f(x) | y \rangle + \langle g(x) | y \rangle && \text{par linéarité à gauche du produit scalaire} \\ &= \lambda \langle x | f(y) \rangle + \langle x | g(y) \rangle && \text{car } f \text{ et } g \text{ sont dans } S(E) \\ &= \langle x | (\lambda f + g)(y) \rangle && \text{linéarité à droite du produit scalaire} \\ &= \langle x | h(y) \rangle, \end{aligned}$$

donc $h \in S_E$, et S_E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 2

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

une **base** (orthonormée, ou pas...) de E , et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . Alors :

f est autoadjoint si et seulement si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle f(e_i) | e_j \rangle = \langle e_i | f(e_j) \rangle$.

Preuve

Si f est autoadjoint, on a en particulier pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle f(e_i) | e_j \rangle = \langle e_i | f(e_j) \rangle$.

Réciproquement, si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \langle f(e_i) | e_j \rangle = \langle e_i | f(e_j) \rangle$: soient x et y deux éléments

de E ; posons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle f(x) | y \rangle &= \left\langle f \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \middle| \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \middle| \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle f(e_i) | e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i | f(e_j) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \middle| \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \middle| f \left(\sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \right\rangle \\
&= \langle x | f(y) \rangle,
\end{aligned}$$

donc f est autoadjoint. $\square$

Rappels (essentiellement...)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est **symétrique** si et seulement si $A = A^T$, i.e. encore ssi :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} = a_{j,i}.$$

- On dit que A est **antisymétrique** si et seulement si $A = -A^T$, i.e. encore ssi :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} = -a_{j,i}.$$

- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques.

On a :

- $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}, \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont (supplémentaires) **orthogonaux** pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donné par $\langle M | N \rangle = \text{Tr}(N^T M)$).

Preuve

... Ce ne sont que des points à la fois essentiels, et pas difficiles. Prenez comme exercice prioritaire de vérifier que vous savez prouver tout ça !

Proposition 3 (rappel)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormée**

de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = M_{\mathcal{B}}(f)$. Alors : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, M_{i,j} = \langle f(e_j) | e_i \rangle.$

Preuve

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a d'une part $f(e_j) = \sum_{i=1}^n M_{i,j} e_i$ (par définition de la matrice d'une application linéaire relativement à des bases), et d'autre part (écriture d'un vecteur dans une base orthonormée),

$f(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle f(e_j) | e_i \rangle e_i$. Qui dit base, dit unicité de la décomposition dans la base en question, on peut donc

identifier : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, M_{i,j} = \langle f(e_j) | e_i \rangle.$ $\square$

Proposition 4

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base orthonormée** de E , et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . Alors :

f est symétrique (c'est-à-dire autoadjoint) si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Preuve

Conséquence directe des propositions précédentes.

D'après la proposition 1., f est symétrique si et seulement si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\langle f(e_i) | e_j \rangle = \langle e_i | f(e_j) \rangle.$$

Mais, d'après la proposition 3., $\langle f(e_i) | e_j \rangle = M_{j,i}$, et $\langle e_i | f(e_j) \rangle = M_{i,j}$.

Donc, f est symétrique si et seulement si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $M_{j,i} = M_{i,j}$, c'est-à-dire si et seulement si la matrice M est symétrique. □

2. Réalité du spectre

Proposition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **autoadjoint** de E . Alors le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.

Ce résultat découle de la proposition suivante :

Proposition bis

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique réelle**. Alors le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}$, i.e. les valeurs propres de A sont **réelles** :

$\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Preuve

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M , et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

On a d'une part $X^T M \bar{X} = X^T \overline{M X} = \bar{\lambda} X^T \bar{X} = \bar{\lambda} \|X\|^2$, et d'autre part,

$$X^T M \bar{X} = X^T M^T \bar{X} = (M X)^T \bar{X} = \lambda X^T \bar{X} = \lambda \|X\|^2.$$

On identifie : $\bar{\lambda} \|X\|^2 = \lambda \|X\|^2$, et, comme $\|X\|$ est non nulle, il en résulte que $\bar{\lambda} = \lambda$, c'est-à-dire que λ est réelle.

3. Orthogonalité des sous-espaces propres

Proposition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **autoadjoint** de E . Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f .

Alors, les sous – espaces propres $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux, i.e. :

$$E_\lambda(f) \perp E_\mu(f).$$



On dispose là aussi bien sûr d'une version matricielle équivalente...

Jolie preuve

Pour tout $x \in E_\lambda(f)$ et pour tout $y \in E_\mu(f)$, $\langle f(x) | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle$, et $\langle x | f(y) \rangle = \mu \langle x | y \rangle$; ces deux expressions sont égales, puisque f est symétrique. Donc, $\langle x | y \rangle = 0$. Chouette, non ?

4. Orthodiagonalisabilité des endomorphismes et matrices symétriques réels

Lemme (Stabilité d'un sev et stabilité de son orthogonal)

Soient $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **autoadjoint** de E , et F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

$$F \text{ est } f\text{-stable si et seulement si } F^\perp \text{ est } f\text{-stable}.$$

Preuve

$$\begin{aligned} (F^\perp \text{ est } f\text{-stable}) &\Leftrightarrow (\forall y \in F^\perp, f(y) \in F^\perp) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in F^\perp, \forall x \in F, \langle f(y) | x \rangle = 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in F^\perp, \forall x \in F, \langle y | f(x) \rangle = 0) \text{ car } f \text{ est autoadjoint} \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in F, f(x) \in (F^\perp)^\perp) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in F, f(x) \in F) \\ &\Leftrightarrow (F \text{ est } f\text{-stable}). \quad \square \end{aligned}$$

Théorème dit « *théorème spectral* », version endomorphismes

Soient $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **autoadjoint** de E . Alors :

- $\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } f}^\perp E_\lambda(f) = E$.
- **f est diagonalisable en base orthonormée,**
i.e. il existe une base de E qui est à la fois orthonormée, et constituée de vecteurs propres de f .

Théorème dit « *théorème spectral* », version matricielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique réelle**. Alors :

A est orthodiagonalisable (ie. diagonalisable dans le groupe orthogonal),

i.e. :

$$\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), \exists P \in \mathcal{O}(n) / A = P \cdot D \cdot P^\top,$$

où $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices diagonales réelles d'ordre n .

Achtung !

Le théorème spectral s'applique uniquement à des matrices symétriques *réelles*. Une matrice symétrique complexe n'est pas forcément diagonalisable, comme le montre l'exemple de $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

Preuves des théorèmes spectraux (non exigible)

Le second théorème n'étant que la traduction matricielle du premier, il suffit d'établir icelui, à commencer, c'est bien notre droit, par son second point. Ce que nous allons faire par récurrence "**forte**" (*beurk*) sur $n = \dim E$. L'initialisation à $n = 0$ est triviale, et l'on suppose le résultat acquis **jusqu'à** l'ordre $n \in \mathbb{N}$. Supposons alors que $\dim E = n + 1$, et donnons – nous un endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{L}(E)$, ainsi qu'une base orthonormale quelconque $\mathcal{B}$ de E . Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On a vu plus haut que $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$, auquel cas on a également vu plus haut que A (donc) et f admettent au moins une valeur propre réelle, disons λ . On note

$F = E_{\lambda}(f)$ le sous-espace propre associé, et je dis alors que deux cas se présentent à nous :

- Si $\dim F = n + 1$
On a $f = \lambda \text{Id}_E$, finished.
- Si $\dim F \neq n + 1$
 - Comme on est en dimension finie, on a $F \oplus F^{\perp} = E$, et par hypothèse $\dim F^{\perp} \geq 1$.
Mais nous avons vu aussi que $F^{\perp}$ est f – stable, *on en a vu des choses...*
On peut ainsi dire que la restriction de f à $F^{\perp}$ induit un endomorphisme φ de $F^{\perp}$.
 - Cet endomorphisme φ est clairement symétrique dans $(F^{\perp}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{F^{\perp}})$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle_{F^{\perp}}$ désigne le produit scalaire induit par $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur $F^{\perp} \times F^{\perp}$. Et comme $\dim F^{\perp} \leq n$, on peut appliquer notre hypothèse de récurrence : il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $F^{\perp}$ qui est φ – propre. Les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ étant propres pour φ , il est clair qu'ils sont aussi propres pour f , puisque φ n'est autre qu'un endomorphisme induit par f !
 - On choisit maintenant une base orthonormale (quelconque) $\mathcal{B}_2$ de F .
Une telle base diagonalise forcément $f|_F$ qui est une homothétie !
 - Il n'y a alors plus qu'à recoller tout ça, et à concaténer les bases orthonormales $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Le fait que $F \oplus F^{\perp} = E$ nous assure que la concaténée de ces deux bases est une base $\mathcal{B}'$ de E , base dont nous venons de voir à l'instant qu'elle est f – propre.

On conclut par le principe de récurrence "fort" (re – beurk). □

Quant au fait que $\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } f} E_{\lambda}(f) = E$, ben, si f est diagonalisable en base orthonormale, il y a de bonnes chances pour que ceci soit vrai.

IV Projecteur orthogonal sur un sous – espace vectoriel

1. Définitions – projecteurs orthogonaux et projections orthogonales

Définition 1

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, et p un projecteur de E .

On dit que p est un **projecteur orthogonal** si et seulement si $\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$, ou si et seulement si $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$, ce qui revient au même, puisque l'on sait déjà que $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = E$.

Définition 2

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, et F un sous – espace vectoriel de E .

On sait que $F \oplus F^\perp = E$, donc :

$$\forall x \in E, \exists ! (x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp / x = x_F + x_{F^\perp}. \quad (*)$$

On appelle **projection orthogonale sur F** , et l'on note p_F , la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, i.e. l'application définie par :

$$\forall x \in E, p_F(x) = x_F, \quad x_F \text{ étant défini par la relation } (*).$$

Proposition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Les projections orthogonales de E sont les projecteurs orthogonaux de E .

Preuve

Cf. le chapitre *espaces préhilbertiens*.

2. Propriétés – Caractérisation géométrique

Proposition 1 (caractérisation du projeté orthogonal)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F un sous – espace vectoriel de E , $x \in E$,

et p_F la projection orthogonale sur F . Alors :

$$\forall x' \in E, x' = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x' \in F \\ x - x' \in F^\perp \end{cases}.$$

Preuve

Par définition, $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que x s'écrive sous la forme $x = p_F(x) + x_{F^\perp}$, où

$x_{F^\perp} \in F^\perp$. Autrement dit, pour tout $x' \in E$: $x' = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x' \in F \\ \exists x_{F^\perp} \in F^\perp, x = x' + x_{F^\perp} \end{cases}$, ou, plus

$$\text{simplement : } x' = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x' \in F \\ x - x' \in F^\perp \end{cases} . \quad \square$$

Proposition 2 (propriétés des projections orthogonales)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E , $x \in E$,

et p_F la projection orthogonale sur F . Alors :

- $\text{Ker } p_F = (\text{Im } p_F)^\perp$.
- $\text{Im } p_F = (\text{Ker } p_F)^\perp$.
- $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$.
 $= \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. (Pythagore !)
- $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Preuves

- p_F est un projecteur orthogonal ; on a donc, par définition, $\text{Ker } p_F = (\text{Im } p_F)^\perp$.
- $(\text{Ker } p_F)^\perp = ((\text{Im } p_F)^\perp)^\perp = \text{Im } p_F$, car on est en dimension finie.
- $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$, et $p_F(x) \perp p_{F^\perp}(x)$. Le résultat s'ensuit (en vertu, comme écrit ci-dessus, du théorème de Pythagore).
- $\|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \square$.

3. Expression du projeté orthogonal en base orthonormale

Proposition (expression du projeté orthogonal en base orthonormale)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient F un sous-espace vectoriel de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{\boxed{p}})$ une base **orthonormale** de F ,

et p_F la projection orthogonale sur F . Alors :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^{\boxed{p}} \langle e_k | x \rangle e_k .$$

Preuve

Complétons $\mathcal{B}$ en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E . On sait qu'alors

$$x = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle e_k = \sum_{k=1}^p \langle e_k | x \rangle e_k + \sum_{k=p+1}^n \langle e_k | x \rangle e_k .$$

Comme $\sum_{k=1}^p \langle e_k | x \rangle e_k \in F$ et $\sum_{k=p+1}^n \langle e_k | x \rangle e_k \in F^\perp$, on peut identifier : $\sum_{k=1}^p \langle e_k | x \rangle e_k = p_F(x) \quad \square$.

4. Interprétation géométrique du procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt

Avec les notations utilisées pour le procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt, si l'on a construit

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ base orthonormée de $F_p = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_p) \rangle$, on cherche un vecteur ε_{p+1} appartenant au sous-

espace $F_{p+1} = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_{p+1}) \rangle$ et qui soit sur la droite vectorielle orthogonale à F_p , puis

(éventuellement) on norme, et enfin (éventuellement) ε_{p+1} peut être choisi « du même côté » que e_{p+1} :

$\varepsilon_{p+1} = e_{p+1} - p_{F_p}(e_{p+1}) = e_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle \varepsilon_k | e_{p+1} \rangle \varepsilon_k$, puis si l'on veut, on re-norme... et hop :

$$\varepsilon_{p+1} = \frac{e_{p+1} - p_{F_p}(e_{p+1})}{\|e_{p+1} - p_{F_p}(e_{p+1})\|} = \frac{e_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle \varepsilon_k | e_{p+1} \rangle \varepsilon_k}{\left\| e_{p+1} - \sum_{k=1}^p \langle \varepsilon_k | e_{p+1} \rangle \varepsilon_k \right\|}. \text{ Ça vous rappelle quelque chose, nan ?}$$

5. Caractérisation des projecteurs orthogonaux

Proposition 1 (caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et p un projecteur de E .

Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est **autoadjoint**, i.e. si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle.$$

Preuve

- Supposons que p est un projecteur orthogonal. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned} \langle p(x) | y \rangle - \langle x | p(y) \rangle &= \langle p(x) | y \rangle + \langle p(x) - x | p(y) \rangle - \langle p(x) | p(y) \rangle \\ &= \left\langle \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} \mid \underbrace{y - p(y)}_{\in \text{Ker } p} \right\rangle + \left\langle \underbrace{p(x) - x}_{\in \text{Ker } p} \mid \underbrace{p(y)}_{\in \text{Im } p} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

- Réciproquement, si l'on suppose que p est autoadjoint : pour tout $(x, y) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p$, $p(y) = x$, donc

$$\langle x | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle = \langle p(x) | y \rangle = \langle 0 | y \rangle = 0, \text{ et } p \text{ est un projecteur orthogonal. } \square.$$

Achung ! Les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints, mais ne sont pas des automorphismes orthogonaux (sauf Id_E).

Proposition 2 (caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs again)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée, et p un

projecteur de E . Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Preuve

- Si p est un projecteur orthogonal : pour tout $x \in E$, $p(x) \perp x - p(x)$. Le théorème de Pythagore donne alors

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2, \text{ d'où l'inégalité } \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

- Si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$, alors, pour tout $x \in (\text{Ker } p)^\perp$: on peut écrire $p(x)$ sous la forme

$p(x) = \underbrace{(p(x) - x)}_{\in \text{Ker } p} + \underbrace{x}_{\in (\text{Ker } p)^\perp}$. On applique à nouveau le théorème de Pythagore, et il vient

$\|p(x)\|^2 = \|p(x) - x\|^2 + \|x\|^2$. Mais $\|p(x)\| \leq \|x\|$; on en déduit que $p(x) - x = 0$, d'où $x \in \text{Im } p$ (car $x = p(x)$). En fin de compte, on a prouvé que $(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p$. Comme $(\text{Ker } p)^\perp$ et $\text{Im } p$ sont deux supplémentaires de $\text{Ker } p$ dans E , on en conclut que $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p$, et que p est un projecteur orthogonal.

Proposition 3 (réduction des projecteurs orthogonaux)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors f est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\exists r \in \{1, n\}, \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}.$$

6. Distance à un sous – espace vectoriel (rappel)

Définition 1

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, x et y deux vecteurs de E .

On appelle **distance de x à y** , et l'on note $d(x, y)$, le réel défini par : $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 2

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sous – espace vectoriel de E , et $x \in E$.

On appelle **distance de x à F** et l'on note $d(x, F)$ le réel défini par :

$$d(x, F) = \inf \{ d(x, y), y \in F \} = \inf \{ \|x - y\|, y \in F \}.$$

(une borne inférieure et non un minimum, car elle n'est pas forcément atteinte...)

Théorème

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F un sous – espace vectoriel de E , $x \in E$, et p_F la projection orthogonale sur F .

Alors $p_F(x)$ est l'**unique** vecteur appartenant à F tel que :

$$\|x - p_F(x)\| = \min \{ \|x - y\|, y \in F \} = d(x, F).$$



On note aussi $\min_{y \in F} \|x - y\|$.



On a également $d(x, F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$ et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$.

V Symétries orthogonales ; isométries en dimension 2

1. Symétries orthogonales, réflexions

Définition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E .

- La symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ est appelée **symétrie orthogonale** par rapport à F .
- La symétrie orthogonale par rapport à F est appelée **réflexion** lorsque F est un hyperplan.

Propriétés 1

- Les symétries orthogonales sont des automorphismes orthogonaux.
- Les réflexions sont des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à -1 .

Propriétés 2

- Les symétries orthogonales sont les seules symétries qui sont des endomorphismes symétriques.
- Les symétries orthogonales sont les seuls endomorphismes qui sont à la fois des isométries et des endomorphismes autoadjoints.

Proposition (réduction des symétries orthogonales)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors f est une symétrie orthogonale si et seulement si :

$$\exists r \in \{1, \dots, n\}, \exists \mathcal{B} \text{ base orthonormée de } E, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & -I_{n-r} \end{array} \right).$$

2. Etude des isométries de $\mathbb{R}^2$

a. Définitions

- L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n et de déterminant égal à 1 est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n , et noté $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
Ses éléments sont appelés matrices de rotation.
- Une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite directe lorsque la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

b. En dimension 2

Proposition 1 – définition

- Les matrices de rotation d'ordre 2 sont les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- Tout automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ est, soit une réflexion, soit la composée de deux réflexions.
- Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. u est une rotation si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$. Lorsque tel est le cas :
 - Pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$.
 - Le réel θ est unique modulo 2π . On dit que c'est une **mesure de l'angle** de la rotation u .
 - On a pour tout vecteur unitaire a :

$$\cos(\theta) = \langle a | u(a) \rangle, \text{ et } \sin(\theta) = \det(a, u(a)).$$

Proposition 2 (Caractérisation des rotations en dimension 2)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, de matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

- u est une rotation si et seulement si : $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(M) = 1$.
- Lorsque tel est le cas, soit θ une mesure de l'angle de la rotation u .

On trouve θ modulo 2π grâce aux relations :

- $\text{Tr}(M) = 2 \cos(\theta)$;
- $\sin(\theta)$ est du même signe que b .

Proposition 3 (Etude des isométries en dimension 2)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, de matrice M dans une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

- u est une isométrie si et seulement si : $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Lorsque tel est le cas :
 - Soit $\det(M) = 1$, et alors u est une rotation ;
 - Soit $\det(M) = -1$, et alors u est une réflexion. Lorsque tel est le cas, il suffit de déterminer $\text{Ker}(M - I_2)$ et $\text{Ker}(M + I_2)$ pour obtenir les éléments de réduction de u .