



2025 - 2026

PC

Espaces préhilbertiens

I Espaces préhilbertiens

1. Produit scalaire

a. Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel

Définition 1

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel.

On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ (**forme**) vérifiant les conditions suivantes :

- φ est **bilinéaire** :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \underbrace{\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z)}_{\text{linéarité à gauche}}$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \underbrace{\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, z)}_{\text{linéarité à droite}}$$

- φ est **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

- φ est **positive** : $\forall x \in E, \varphi(x, \boxed{x}) \geq 0$.

- φ est **définie** : $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Bref, un produit scalaire sur E est une **forme bilinéaire symétrique définie positive**.

 $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = \varphi(0_E, x) = 0$.

 Toujours vérifier **la symétrie AVANT la bilinéarité**, la linéarité à gauche (droite) suffit alors.

 φ positive $\Leftrightarrow \forall x \in E, \varphi(x, \boxed{x}) \geq 0$, et non : $\forall x \in E, \varphi(x, \boxed{y}) \geq 0$.

 On démontre habituellement dans l'ordre **forme symétrique bilinéaire positive définie**.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel, et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ un produit scalaire sur E .

Le couple (E, φ) est appelé **espace préhilbertien (réel)**.

Si de plus E est de dimension finie n , (E, φ) est appelé **espace euclidien** de dimension n .

b. Notations usuelles

On attribue plusieurs notations classiques à un produit scalaire φ : $\varphi(x, y)$ est noté en général :

$$\langle \textcolor{red}{x} \mid \textcolor{red}{y} \rangle, \text{ ou } (x \mid y), \text{ ou } \langle x, y \rangle, \text{ ou encore } x \cdot y.$$

c. Premiers exemples de produits scalaires

- $\text{Sur } E = \mathbb{R}^n$: on définit le produit scalaire **canonique** par : $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$,

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

- $\text{Sur } E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: on définit le produit scalaire **canonique** par :

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \langle X | Y \rangle = X^T Y = Y^T X = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

où l'on a posé $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Les deux produits scalaires ci-dessus sont identifiés en vertu de l'isomorphisme canonique entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- $\text{Sur } E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: on définit le produit scalaire **canonique** par :

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \langle M | N \rangle = \text{Tr}(M^T N).$$

- $\text{Sur } E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ ($a < b$) On définit le produit scalaire **canonique** par :

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

 Ceci ne définit par contre pas un produit scalaire sur $C_{mx}([a, b], \mathbb{R}) \dots$

2. Une règle de calcul

Propriété

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Alors pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$\forall (x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in E^n, \forall (y_j)_{j \in \{1, \dots, p\}} \in E^p, \forall (\lambda_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}^n, \forall (\mu_j)_{j \in \{1, \dots, p\}} \in \mathbb{R}^p,$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^p \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j \langle x_i | y_j \rangle.$$

3. Normes et distances euclidiennes

a. Définitions

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- L'application $\| \cdot \| : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{cases}$

est appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

- L'application $d : \begin{pmatrix} E^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x - y) & \mapsto & \|x - y\| \end{pmatrix}$ est appelée **distance** associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

b. Une première propriété

a. Proposition fondamentale

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu \langle x | y \rangle + \mu^2 \|y\|^2.$$

En particulier : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$,

et : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, notamment $\forall x \in E, \|-x\| = \|x\|$.

β. On généralise plus ou moins

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\| \cdot \|$ la norme associée, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_k)_{k \in 1, n} \in E^n$.

Alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i | x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle.$$

c. Vecteurs unitaires

Définition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Un vecteur x de E est dit **normé** ou **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Ces vecteurs jouent un rôle important (voir par exemple plus tard la notion fondamentale de base orthonormale, ou encore le procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt...), et il existe un moyen simple de se ramener à un vecteur normé en partant d'un vecteur non nul, on appelle cela « **normer un vecteur** » :

Propriété

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x \neq 0_E$ un vecteur non nul de E .

Alors le vecteur $y = \frac{x}{\|x\|}$ est normé : $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$.

4. Propriétés fondamentales des normes euclidiennes – inégalités de Schwarz et de Minkowski

Proposition 1 (propriétés définissant une norme quelconque)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\| \cdot \|$ la norme euclidienne ou associée.

Alors, $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

- $\|x\| \geq 0.$

- **(séparation, ou définition) :** $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E.$

- **(homogénéité) :** $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

- **(inégalité triangulaire) :** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Seule l'inégalité triangulaire mérite une démonstration... on rappelle qu'elle provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. 4.b.).

Proposition 2 (identités de polarisation)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Alors, $\forall (x, y) \in E^2 :$

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle.$

- $\langle x | y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$

- $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$

Preuve

L'égalité $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle$ n'est pas une nouveauté, et elle entraîne immédiatement la relation

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2). \text{ Enfin,}$$

$$\frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4} ((\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle) - (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x | y \rangle)) = \langle x | y \rangle.$$

Proposition 3 (identité du parallélogramme)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors, $\forall (x, y) \in E^2 :$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Cette propriété caractérise les normes issues de produits scalaires parmi les normes (dur...)

5. Inégalités de Cauchy – Schwarz et de Minkowski

a. Les résultats

Théorème (inégalité de Cauchy – Schwarz, ou de Bouniakowski)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors,

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

De plus, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve

Lorsque $x = 0$, le résultat est évident ; supposons désormais x non nul ; soit l'application $P : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \lambda \mapsto \|\lambda x + y\|^2 \end{cases}$.

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$, puis en développant par bilinéarité, il vient

$P(\lambda) = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2$: P est une fonction polynomiale de degré 2. Puisqu'elle est de signe constant, son discriminant est négatif : $4(\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2) \leq 0$, et ceci prouve l'inégalité de Cauchy – Schwarz.

De plus, en cas d'égalité, le discriminant de P est nul, cette fonction polynomiale admet donc une racine (double) : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\|\lambda x + y\| = 0$, d'où la colinéarité de x et de y .

Corollaire (inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si les vecteurs x et y sont

positivement colinéaires (i.e. : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2 / \lambda x = \mu y$).

Preuve

- Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x | y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy – Schwarz} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Minkowski.

- Si x est nul, il est évident, d'une part qu'il y a égalité dans cette inégalité, d'autre part que x et y sont positivement colinéaires. Supposons désormais x non nul.

S'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, il y a égalité dans celle de Cauchy – Schwarz, donc x et y sont colinéaires. Comme x est non nul, il existe donc déjà $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y = \mu x$. Alors,

$$\|x + y\|^2 = \|(1 + \mu)x\|^2 = (1 + \mu)^2 \|x\|^2 \text{ et } (\|x\| + \|y\|)^2 = (1 + |\mu|)^2 \|x\|^2, \text{ l'égalité étudiée}$$

entraîne donc que $|1 + \mu|^2 = (1 + |\mu|)^2$, soit $(1 + \mu)^2 = 1 + \mu^2 + 2|\mu|$, ou encore, en simplifiant,

$\mu = |\mu|$. Il en résulte que μ est positif, et que x et y sont positivement colinéaires.

Vérifier que, réciproquement, si x et y sont positivement colinéaires, alors $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, est sans difficulté.

Recorollaire (deuxième inégalité triangulaire)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Alors, $\forall (x, y) \in E^2$:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Cette inégalité est la seule, parmi les résultats du cours, qui permette de **minorer** une norme.

Preuve

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ par inégalité triangulaire, ce qui donne déjà $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. L'inégalité $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ s'obtient de la même façon, d'où le résultat.

b. Application des inégalités CBS ou de Minkowski, reprise des exemples fondamentaux

- $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant CBS avec le n -uplet $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $(|y_1|, \dots, |y_n|)$, il vient :

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\forall (f, g) \in (C^0([a, b], \mathbb{R}))^2$, en appliquant CBS avec $|f|$ et $|g|$, il vient :

$$\int_a^b |f(t) g(t)| dt \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

et a fortiori...

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\forall (f, g) \in (C^0([a, b], \mathbb{R}))^2,$

$$\left(\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$



De manière générale, **penser à CBS et à Minkowski** dès qu'il y a des inégalités faisant intervenir des carrés, et des racines carrées ...

II Orthogonalité(s)

1. Vecteurs orthogonaux

a. Définition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soit $(x, y) \in E^2$.

Les vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\langle x | y \rangle = 0$.

On note alors $x \perp y$.

b. Une première propriété

Théorème (Pythagore)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soit $(x, y) \in E^2$. Alors :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Théorème (Pythagore généralisé)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ sont deux à deux orthogonaux, alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Preuve :

On a $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle$. Le théorème de Pythagore en découle.

2. Orthogonal d'une partie

a. Définition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $A \subset E$ une partie de E . On appelle **orthogonal** de A ,

et l'on note $A^\perp$, l'ensemble :

$$A^\perp = \{ x \in E / \forall y \in A, \langle x | y \rangle = 0 \}.$$

Autrement dit, l'orthogonal de A est l'ensemble des éléments de E orthogonaux à **tous** les éléments de A .

b. Proposition

Sous les mêmes hypothèses, et avec les mêmes notations...

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

c. Propriétés

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et A une partie de E . Alors,

- $A \subset (A^\perp)^\perp$.
- $A^\perp = (\text{Vect} \langle A \rangle)^\perp$.
- En particulier, si $F = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_p) \rangle$, alors :

$$\forall x \in E, x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in 1, p, \langle x | e_i \rangle = 0.$$

Preuves :

- Tout élément de A est orthogonal à tout élément de E qui est orthogonal à tout élément de A . 🤔
 - A étant inclus dans $\text{Vect} \langle A \rangle$, pour tout $x \in E$: si x est orthogonal à tout élément de $\text{Vect} \langle A \rangle$, il est a fortiori orthogonal à tout élément de A . Ceci prouve l'inclusion $(\text{Vect} \langle A \rangle)^\perp \subset A^\perp$.
- Soit maintenant $x \in A^\perp$. Alors, pour tout $y \in \text{Vect} \langle A \rangle$, il existe $n \in \mathbb{N}$, n éléments de $e_1, \dots, e_n$ de A , ainsi que n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tels que $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Alors, $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x | e_k \rangle = 0$. Il en résulte que x appartient à $(\text{Vect} \langle A \rangle)^\perp$; ceci achève la démonstration.
- Cas particulier, en effet...

Remarque

Pour un sous – espace vectoriel F de E , l'inclusion $(F^\perp)^\perp \subset F$ est fausse en général (nous verrons toutefois qu'elle est exacte lorsque F est de dimension finie). Voici un contre – exemple :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles développables en séries entières sur $[0, 2]$, muni du produit scalaire

$$\langle | \rangle : (f, g) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \right) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \text{ où } f \text{ (resp. } g) \text{ est la fonction } x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \text{ (resp.}$$

$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$). A vous de vérifier que $\langle | \rangle$ est bien défini, et est effectivement un produit scalaire. Les fonctions

polynomiales forment un sous – espace vectoriel de E , que l'on notera F . Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ un élément

de E . Si $f \in F^\perp$, alors, en particulier, f est orthogonale à toutes les fonctions $g_k : x \mapsto x^k$.

Mais $\langle f | g_k \rangle = a_k$; donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$, et f est la fonction nulle.

Ceci assure que $F^\perp = \{0\}$, et alors $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$ n'est pas inclus dans F .

Exercice 1

Soient $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien, A et B deux parties de E . Montrer que :

- 1_ $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
- 2_ $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$.
- 3_ $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
- 4_ $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

3. Parties orthogonales

Définition 3

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, A et B deux parties de E .

On dit que A et B sont **orthogonales** si et seulement si :

$$\boxed{\forall a \in A, \forall b \in B, a \perp b}, \text{ i.e. : } \boxed{\forall a \in A, \forall b \in B, \langle a | b \rangle = 0},$$

autrement dit si et seulement si **tout** élément de A est orthogonal à **tout** élément de B .

On note encore $A \perp B$.

Propriété

Sous les mêmes hypothèses, et avec les mêmes notations...

$$\boxed{A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp}.$$

Preuve

A est orthogonal à B , si et seulement si pour tout $a \in A$: $\forall b \in B, a \perp b$, donc si et seulement si tout élément de A appartient à $B^\perp$. Ceci prouve l'équivalence $A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp$, et $A \perp B \Leftrightarrow B \subset A^\perp$ s'en déduit par symétrie des rôles de A et B .

4. Familles orthogonales

a. Définition 4

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- La famille $\mathcal{F}$ est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\boxed{\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j}, \text{ i.e. }$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \langle e_i | e_j \rangle = 0}.$$

- $\mathcal{F}$ est dite **orthonormale** ou **orthonormée** si et seulement si :

$$\boxed{\forall (i, j) \in I^2, \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}},$$

i.e. une famille orthonormale (orthonormée) est une famille orthogonale constituée de vecteurs unitaires.

b. Proposition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- Toute famille orthonormale est libre.

Preuve

- Toute famille est libre si et seulement si toutes ses sous – familles finies le sont, il suffit donc de prouver le résultat dans le cas d'une famille finie. Considérons alors une famille $(e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs deux à deux

orthogonaux, et tous non nuls. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$. Pour tout

$i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\left\langle e_i \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right. \right\rangle = 0$, d'où $\sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_i | e_k \rangle = 0$. L'orthogonalité de la famille

$(e_1, \dots, e_n)$ permet de réduire cette expression à : $\lambda_i \langle e_i | e_i \rangle = 0$. Comme e_i est non nul, $\langle e_i | e_i \rangle \neq 0$; il en résulte que $\lambda_i = 0$: la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

• • Cf. • •

c. Procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt

Théorème (Gram – Schmidt)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille **libre** de vecteurs de E .

Soit $\mathcal{G} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la famille de vecteurs définie par :

$$\circ \quad \varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \text{ et}$$

$$\circ \circ \quad \forall k \in \{2, \dots, p\}, \varepsilon_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\|}.$$

Alors :

i – $\mathcal{G}$ est une famille orthonormale de E .

ii – $\mathcal{G}$ est l'unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de E vérifiant :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect} \left((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \right) = \text{Vect} \left((e_1, \dots, e_k) \right), \text{ et}$$

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle \varepsilon_k | e_k \rangle \in \mathbb{R}^*.$$

Elle est dite déduite de $\mathcal{F}$ par le **procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt**.

Preuve

On procède par récurrence sur p , l'hypothèse de récurrence étant : les relations machin et truc permettent, de manière unique, de définir une famille, et celle – ci est l'unique famille orthonormée telle que ceci et cela.

Pour $p = 1$, c'est relativement idiot. Supposons maintenant la propriété établie à un rang $p \in \mathbb{N}^*$, et

considérons une famille libre $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ de $p + 1$ vecteurs de E .

$$\bullet \text{ Par hyp. de récurrence, la famille } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \text{ donnée par : } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \\ \forall k \in \{2, \dots, p\}, \varepsilon_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\|} \end{array} \right.$$

est bien définie (de manière unique), et c'est la seule famille orthonormée vérifiant

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_k) \rangle \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle \varepsilon_k | e_k \rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

- Soit maintenant $\varepsilon_{p+1} \in E$. La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$ vérifie

$$\begin{cases} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1}) \text{ est orthonormée} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_k) \rangle \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle \varepsilon_k | e_k \rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

si et seulement si $(*)$:

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle \varepsilon_k | \varepsilon_{p+1} \rangle = 0 \\ \|\varepsilon_{p+1}\| = 1 \\ \text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1}) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_{p+1}) \rangle \\ \langle \varepsilon_{p+1} | e_{p+1} \rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

Comme $\text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_p) \rangle$,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle \varepsilon_k | \varepsilon_{p+1} \rangle = 0 \\ \|\varepsilon_{p+1}\| = 1 \\ \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha_{p+1} \neq 0 \text{ et } \varepsilon_{p+1} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_i + \alpha_{p+1} e_{p+1} \\ \langle \varepsilon_{p+1} | e_{p+1} \rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases},$$

d'où, puisque $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est orthonormée,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha_{p+1} \neq 0 \text{ et } \varepsilon_{p+1} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_i + \alpha_{p+1} e_{p+1} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \alpha_k + \alpha_{p+1} \langle \varepsilon_k | \alpha_{p+1} e_{p+1} \rangle = 0 \\ \|\varepsilon_{p+1}\| = 1 \\ \langle \varepsilon_{p+1} | e_{p+1} \rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

$$\text{On continue : } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha_{p+1} \in \mathbb{R}^*, \varepsilon_{p+1} = \alpha_{p+1} \left(e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right) \\ \|\varepsilon_{p+1}\| = 1 \\ \langle \varepsilon_{p+1} | e_{p+1} \rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

En notant que $e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i$ est non nul, puisque $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ est libre et

$\text{Vect} \langle (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \rangle = \text{Vect} \langle (e_1, \dots, e_p) \rangle$, on a encore

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{p+1} = \alpha \frac{e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|}, \text{ avec } |\alpha| = 1 \\ \langle \varepsilon_{p+1} | e_{p+1} \rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{p+1} = \alpha \frac{e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|}, \text{ avec } |\alpha| = 1 \\ \frac{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|}{\alpha} \left\langle \varepsilon_{p+1} + \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i | \varepsilon_{p+1} \right\rangle \in \mathbb{R}_+^* \end{cases},$$

(on a écrit e_{p+1} en fonction de ε_{p+1} et des autres ε_i :

$$e_{p+1} = \frac{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|}{\alpha} \left(\varepsilon_{p+1} + \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right).$$

La première ligne de ce dernier système assurant déjà l'orthonormalité de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1})$, il vient finalement

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{p+1} = \alpha \frac{e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|}, \text{ où } |\alpha| = 1 \\ \frac{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|}{\alpha} \|\varepsilon_{p+1}\| \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Leftrightarrow \varepsilon_{p+1} = \frac{e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i}{\left\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^p \langle \varepsilon_i | e_{p+1} \rangle \varepsilon_i \right\|}.$$

Ceci achève la récurrence, et la démonstration.

Un premier exemple

Exercice 2

Q1_ On considère l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} (\mathbb{R}_3[X])^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt \end{cases}.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_3[X], \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Q2_ On se place désormais dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_3[X], \langle \cdot | \cdot \rangle)$ défini ci-dessus.

Déterminer la base orthonormale (P_0, P_1, P_2, P_3) construite à partir de la base

canonique $(1, X, X^2, X^3)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt.

Remarque

Les polynômes P_k constituent une famille de **polynômes orthogonaux** pour ce produit scalaire, appelés **polynômes de Legendre**. Il est de bon goût de connaître les familles de polynômes orthogonales pour un produit scalaire usuel, telles celles constituées des polynômes d'Hermite, de Jacobi, de Laguerre...

Réponse

Le calcul donne : $P_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $P_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} X$; $P_2 = \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right)$ et $P_3 = \frac{5\sqrt{14}}{4} \left(X^3 - \frac{3}{5} X \right)$.

5. Supplémentaires orthogonaux, sommes directes orthogonales

a. supplémentaires orthogonaux

Proposition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous – espace vectoriel de E .

Alors : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, i.e. $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$.

Proof

Pour tout $x \in E$, $x \in F \cap F^\perp \Rightarrow x \perp x \Rightarrow x = 0$. $\square$

Remarque

On montre de la même façon que, de manière plus générale, si F et G sont deux sous – espaces orthogonaux de E , alors ils sont en somme directe.

Définition 5

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous – espace vectoriel de E .

Si $F + F^\perp = F \oplus F^\perp = E$, F et $F^\perp$ sont dits **supplémentaires orthogonaux**.

Remarques

- En dimension infinie, il n'est pas toujours vrai que $F \oplus F^\perp = E$: reprendre le contre – exemple donné en 2.c. ...
- En pratique, vérifier que deux sous – espaces vectoriels F et G de E revient à prouver que $\begin{cases} F \perp G \\ F + G = E \end{cases}$: en effet, d'après la proposition précédente et la remarque qui la suit, $F \perp G$ entraîne $F \cap G = \{0\}$.

b. Cas d'un sous – espace de dimension finie

Théorème

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sev **de dimension finie** de E . Alors,

- $F \oplus F^\perp = E$. **Autrement dit**, F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .
- $(F^\perp)^\perp = F$.

Preuve

- Bien entendu, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale, reste donc à prouver que $F + F^\perp = E$.

Soit p la dimension de F , $(u_1, \dots, u_p)$ une base de cet espace, et $(e_1, \dots, e_p)$ la famille orthonormée déduite de $(u_1, \dots, u_p)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt. Alors, $(e_1, \dots, e_p)$ est une base (orthonormée) de F . Par conséquent, pour tout $y \in E$, $y \in F^\perp \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle y | e_k \rangle = 0$.

Soit alors $x \in E$. Posons $x_F = \sum_{k=1}^p \langle x | e_k \rangle e_k$, et $x_{F^\perp} = x - x_F$. Il est clair que $x = x_F + x_{F^\perp}$, et que

$x_{F^\perp} \in F^\perp$. De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$\langle x_{F^\perp} | e_i \rangle = \langle x | e_i \rangle - \sum_{k=1}^p \langle x | e_k \rangle \langle e_k | e_i \rangle = \langle x | e_i \rangle - \langle x | e_i \rangle \langle e_i | e_i \rangle = 0,$$

et il en résulte que $x_{F^\perp} \in F^\perp$. Tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément

de $F^\perp$, on a donc bien $F \oplus F^\perp = E$.

- • L'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ est déjà connue. Réciproquement, considérons un vecteur x de $(F^\perp)^\perp$. D'après ce qui précède, x s'écrit (de manière unique) sous la forme $x = x_F + x_{F^\perp}$, avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$.

Comme $x \in (F^\perp)^\perp$, $x_{F^\perp}$ est nul, ce qui assure que x appartient à F . $\square$.

Corollaire (inégalité de Bessel)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Soit $F = (e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée finie de vecteurs de E .

Alors pour tout $x \in E$: $\sum_{k=1}^p \langle e_k | x \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Preuve

Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. F est de dimension finie, on a donc $F \oplus F^\perp = E$. Soit maintenant $x \in E$; x s'écrit de manière unique sous la forme comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$. D'autre part, $(e_1, \dots, e_p)$ est une

base de F ; par conséquent, x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k + x_{F^\perp}$,

où $(\alpha_k)_{k \in \{1, \dots, p\}} \in \mathbb{K}^n$, et où $x_{F^\perp} \in F^\perp$. La famille $(e_1, \dots, e_p, x_{F^\perp})$ étant orthogonale, le théorème de

Pythagore donne $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \|\alpha_k e_k\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2 = \sum_{k=1}^p \alpha_k^2 + \|x_{F^\perp}\|^2$, d'où bien sûr $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^p \alpha_k^2$.

L'orthogonalité de la famille $(e_1, \dots, e_p, x_{F^\perp})$ assure aussi que pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$,

$$\langle e_k | x \rangle = \left\langle e_k \left| \sum_{k=1}^p \alpha_k e_k + x_{F^\perp} \right. \right\rangle = \langle e_k | \alpha_k e_k \rangle = \alpha_k.$$

En remplaçant dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité de Bessel : $\sum_{k=1}^p \langle e_k | x \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

c. Sommes directes orthogonales

Proposition – définition 6

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $n \in \mathbb{N}^*$, et $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E . On suppose les F_i deux à deux orthogonaux.

Alors, la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe. Elle est notée $\bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} F_i$, et appelée **somme directe orthogonale** des F_i .

Preuve de la partie proposition : Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n F_i$:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \left| x_k \right. \right\rangle = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \|x_k\|^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \quad \square.$$

6. Projecteurs orthogonaux ; distance à un sous – espace vectoriel

a. Projecteurs orthogonaux vs projections orthogonales

Définition

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et F un sous – espace vectoriel de E .

On suppose que F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux.

La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est alors appelée **projection orthogonale sur F** .

Définition bis

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

On dit que p est un **projecteur orthogonal** lorsque $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$.

Proposition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Les projections orthogonales de E sont les projecteurs orthogonaux de E .

Preuve

- Soit p un projecteur de E . Alors, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_{\text{Ker } p} + x_{\text{Im } p}$, où $x_{\text{Ker } p} \in \text{Ker } p$ et $x_{\text{Im } p} \in \text{Im } p$. On a

$$p(x) = p(x_{\text{Im } p}) = p(x_{\text{Im } p}) = x_{\text{Im } p} \text{ car } p \text{ est un projecteur, et car } x_{\text{Im } p} \in \text{Im } p.$$

Comme $\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$, on en conclut que p est la projection orthogonale sur $\text{Im } p$.

- Soit p la projection orthogonale sur un sous – espace vectoriel F de E tel que $F \oplus F^\perp = E$. A nouveau, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_F + x_{F^\perp}$, avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$ et l'on a $p(x) = x_F$.

Pour tout $x \in E$, $p \circ p(x) = p(x_F)$; mais l'écriture de x_F comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$ est $x_F = x_F + 0$; on a donc $p(x_F) = x_F$, ce qui assure que $p \circ p = p$.

Reste à prouver la linéarité de p . Considérons deux vecteurs x, y de E , ainsi qu'un scalaire λ .

$$\text{On a } \begin{cases} x = p(x) + x_{F^\perp}, \text{ avec } p(x) \in F \text{ et } x_{F^\perp} \in F^\perp \\ y = p(y) + y_{F^\perp}, \text{ avec } p(y) \in F \text{ et } y_{F^\perp} \in F^\perp \\ \lambda x + y = p(\lambda x + y) + z_{F^\perp}, \text{ avec } p(\lambda x + y) \in F \text{ et } z_{F^\perp} \in F^\perp \end{cases}, \text{ donc}$$

$$\begin{cases} \lambda x + y = (\lambda p(x) + p(y)) + (\lambda x_{F^\perp} + y_{F^\perp}), \text{ où } \lambda p(x) + p(y) \in F \text{ et } \lambda x_{F^\perp} + y_{F^\perp} \in F^\perp \\ \lambda x + y = p(\lambda x + y) + z_{F^\perp}, \text{ avec } p(\lambda x + y) \in F \text{ et } z_{F^\perp} \in F^\perp \end{cases}.$$

Par unicité de l'écriture comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$, on peut identifier :

$$\lambda p(x) + p(y) = p(\lambda x + y), \text{ ce qui prouve la linéarité de } p.$$

Finalement, p appartient à $\mathcal{L}(E)$ et vérifie $p \circ p = p$: p est un projecteur. $\square$

b. Distance à un sous – espace vectoriel

Définition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soit F un sous – espace vectoriel de E . Pour tout $x \in E$, on définit la distance de x à F , notée $d(x, F)$, par : $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Remarques

- $\inf_{y \in F} \|x - y\|$ est bien défini : en effet, $\{\|x - y\|, y \in F\}$ est un sous – ensemble non vide de $\mathbb{R}$, minoré (par 0) : il admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.
- Il s'agit d'une borne inférieure et non d'un minimum, car elle n'est pas nécessairement atteinte.

Pour le prouver, reprenons notre l'exemple de l'ev E est des fonctions réelles développables en séries entières sur

$[0, 2]$, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle : (f, g) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k, \sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k \right) \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$; soit F le sous –

espace de E constitué des fonctions polynomiales. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ un élément de $E \setminus F$.

Pour tout $P \in F$, $P \neq f$, donc $\|P - f\| \neq 0$. Montrons qu'en revanche, $d(f, F) = 0$. Pour cela,

considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

On a $\|f - P_n\| = \left\| x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right\| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2 = 0$ (comme reste de la série convergente $\sum_{k \geq 0} a_k^2$). Ceci assure, par définition d'une borne inférieure, que $d(f, F) = 0$ $\square$.

c. Distance à un sous – espace vectoriel et projection orthogonale

Proposition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soit F un sous – espace vectoriel de E tel que $F^\perp$ soit supplémentaire de F dans E . Alors, pour tout $x_0 \in E$, l'application $\begin{pmatrix} F \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \|x_0 - y\| \end{pmatrix}$ admet un minimum, qui est égal à $d(x_0, F)$. Ce minimum est atteint en $p_F(x_0)$, et uniquement en ce point.

On a $d(x_0, F) = \|x_0 - p_F(x_0)\| = \|p_{F^\perp}(x_0)\|$.

Preuve

Soit $x_0 \in E$; on a $x_0 = p_F(x_0) + p_{F^\perp}(x_0)$. Pour tout $y \in F$, $p_F(x_0) - y$, et $p_{F^\perp}(x_0) \in F^\perp$, ces deux vecteurs sont donc orthogonaux. Par suite, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x_0 - y\|^2 = \|(p_F(x_0) - y) + p_{F^\perp}(x_0)\|^2 = \|p_F(x_0) - y\|^2 + \|p_{F^\perp}(x_0)\|^2,$$

d'où $\|x_0 - y\|^2 \geq \|x_0 - p_F(x_0)\|^2 = \|p_{F^\perp}(x_0)\|^2$ $\square$

Remarque : L'égalité $x_0 = p_F(x_0) + p_{F^\perp}(x_0)$, et l'orthogonalité de $p_F(x_0)$ et $p_{F^\perp}(x_0)$, donnent aussi la

relation $\|x_0\|^2 = \|p_F(x_0)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x_0)\|^2$, soit : $\|x_0\|^2 = \|p_F(x_0)\|^2 + d(x_0, F)^2$.