Lycée Lakanal

2025- 2026

PC

Liste d’exercices

Espaces préhilbertiens

Exercice 1

Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci – dessous définissent – elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

(on note à chaque fois $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$)

1. $\varphi : (x, y) \mapsto x_1 y_1 + 6 x_2 y_2 + 3 x_3 y_3 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 + 3 \lambda x_1 y_3 + 3 \lambda x_3 y_1$.

2. $\varphi : (x, y) \mapsto x_1 y_1 + 10 x_2 y_2 + 6 x_1 y_2 + \lambda x_2 y_1 - x_2 y_3 - x_3 y_2$.

3. $\varphi : (x, y) \mapsto 2 x_1 y_1 + 7 x_1 y_2 + 7 x_2 y_1 + 8 x_2 y_2 - 3 x_3 y_3 + \lambda x_2 y_3 + \lambda x_3 y_2$.

4. $\varphi : (x, y) \mapsto (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 + x_1)(y_3 + y_1)$
$- \lambda (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$.

Exercice 2

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

1. $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \, \mathrm{d}t$.

2. $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \left(P'(t) Q(t) + P(t) Q'(t) \right) \mathrm{d}t$.

3. $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k) Q(k)$.

4. $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \left(P'(t) Q'(t) \right) \mathrm{d}t + P(0) Q(0)$.

Exercice 3

Soient E un espace euclidien (*pas supposé de dimension* n *a priori*), et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle^2$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4

1. Montrer que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l’application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t A B)$ est un produit scalaire.

2. Soit $\mathcal{N}$ la norme associée, montrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A) \mathcal{N}(B)$.

3. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \, \mathcal{N}(A)$.

Exercice 5

Soient $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace préhilbertien, et $(x, y) \in E^2$.

Q1_ Calculer $\left\| \|x\|^2 y - \langle x | y \rangle x \right\|^2$.

Q2_ Quelle célèbre inégalité peut – on déduire de ce calcul ? En préciser les cas d'égalité.

Exercice 6

Soit $\left(E, \langle \,.\, | \,.\, \rangle \right)$ un espace préhilbertien. Soit f une **application** de E dans E telle que $f\left(0_E\right) = 0_E$, et telle que :

$$\forall\ (x, y) \in E^2,\ \| f(x) - f(y) \| = \| x - y \|.$$

Q0_ Montrer que : $\forall\ x \in E,\ \| f(x) \| = \| x \|$.

Q1_ Montrer que : $\forall\ (x, y) \in E^2,\ \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$.

Q2_ Montrer que f est une application linéaire, *i.e.* un endomorphisme de E.

Exercice 7

Soient $\left(E, \langle \,.\, | \,.\, \rangle \right)$ un espace préhilbertien réel, et $\| \,.\, \|$ la norme euclidienne associée, F un sous – espace vectoriel de E, et $x \in E$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

***i*)** $x \in F^{\perp}$.

***ii*)** $\forall\ y \in F,\ \langle x \mid y \rangle \leq \| y \|^2$.

<u>hint</u> *Pour l'implication **ii)** $\Rightarrow$ **i)**, on pourra considérer λy, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Exercice 8

Polynômes de Tchebychev

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Q1_ **a_** Pour $x \in [-1, 1]$, calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$ et $T_2(x)$.

b_ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\, x\, T_n(x).$$

c_ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme. Déterminer son degré, et son coefficient dominant.

Q2_ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer T_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Q3_ Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$ est un produit scalaire.

<u>hint</u> ***P****enser à un changement de variable adéquat pour justifier la convergence de*

l'intégrale généralisée définissant $\langle P \mid Q \rangle$, et facilitant qui plus est les calculs ultérieurs…

Q4_ Montrer que la famille $\left(T_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\left(\mathbb{R}[X], \langle \,.\, | \,.\, \rangle \right)$.

En déduire une famille (base) orthonormale de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 9

Soit $\left(E, \langle \,.\mid.\, \rangle\right)$ un espace préhilbertien, $\|\,.\,\|$ la norme euclidienne associée, et p un projecteur de E.

Q1_ Montrer que : $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p \iff \operatorname{Ker} p = \left(\operatorname{Im} p\right)^{\perp}$.

Q2_ Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i **)** p est un projecteur orthogonal, *i.e.* $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$.

ii **)** $\forall\, (x, y) \in E^2,\ \langle\, p(x) \mid y \,\rangle = \langle\, x \mid p(y) \,\rangle$.

iii **)** $\forall\, z \in E,\ \|\, p(z) \,\| \leq \|\, z \,\|$.

hint *Pour l'implication **iii)** $\Rightarrow$ **i)**, on se donnera $(x, y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$,*

et l'on considèrera $z_\lambda = \lambda x + y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit $\left(E, \langle \,.\mid.\, \rangle\right)$ un espace préhilbertien, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

1_ $f^2 = -Id_E$.

2_ f est une ***isométrie***, i.e. : $\forall\, x \in E,\ \|\, f(x) \,\| = \|\, x \,\|$.

3_ $\forall\, x \in E,\ \langle\, f(x) \mid x \,\rangle = 0$.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel normé. On considère une norme $\|\,.\,\|$ sur E qui vérifie :

$$\forall\, (x, y) \in E^2,\ \|\, x + y \,\|^2 + \|\, x - y \,\|^2 = 2\left(\|\, x \,\|^2 + \|\, y \,\|^2\right).$$

On souhaite montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme euclidienne.

Q1_ Introduire la forme polaire φ associée à $\|\,.\,\|$, c'est à – dire l'application

$\varphi : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$. Montrer que :

$$\forall\, (x, y, z) \in E^3,\ \varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z).$$

Q2_* Montrer que : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, (x, y) \in E^2,\ \varphi(\lambda x, y) = \lambda\, \varphi(x, y)$.

Q3_ Conclure.

Exercice 12

Polynômes de Hermite

On pose $E = \mathbb{R}[X]$, et l'on identifie polynômes et fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Q1_ Pour $P \in E$, établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-t^2}\, dt$.

Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose : $\langle\, P \mid Q \,\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t^2}\, dt$.

Q2_ Montrer que $\langle\, . \mid . \,\rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\| \,.\, \|$ la norme associée.

Q3_ Soit $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2} h^{(n)}(x)$.

a_ Calculer H_0, H_1, H_2 et H_3.

b_ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} = -2\,X\,H_n - 2\,n\,H_{n-1}$.

c_ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité, et le coefficient dominant.

d_ Trouver une relation entre H_{n+1}, H_n, et H_n'.

e_ En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n' = -2\,n\,H_{n-1}$.

Q4_ **a_** Montrer que : $\forall\,(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \langle H_p \mid H_q \rangle = 2\,q\,\langle H_{p-1} \mid H_{q-1} \rangle$.

b_ Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $(E, \langle\, . \mid . \,\rangle)$.

On donnera, si possible, deux démonstrations différentes…

c_ Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\lambda_n = \| H_n \|$. En déduire une famille orthonormale de $(E, \langle\, . \mid . \,\rangle)$.

Exercice 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire et de la norme euclidienne usuelle, démontrer *l'inégalité d'Hadamard :* $|\det A| \leq \|C_1\|\,\|C_2\| \ldots \|C_n\|$

On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram – Schmidt.

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.

Exercice 14

1. Déterminer la borne inférieure des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\left(x^3 + a\,x^2 + b\,x + c\right)^2 \mathrm{d}x$ lorsque (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$.

2.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la borne inférieure des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1 + a_1\,x + \ldots + a_n\,x^n\right)^2 \mathrm{d}x$ lorsque $(a_1, \ldots, a_n)$ décrit $\mathbb{R}^n$.

Exercice 15

Polynômes de Legendre

L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle \mid \rangle : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left(\left(X^2 - 1\right)^n\right)^{(n)}$.

1. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de E.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\| L_n \|$.

3. Déterminer l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E.

Exercice 16

Polynômes de Laguerre

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P et Q dans E, on pose $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) \, dt$.

1. Montrer que $\langle \ | \ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = \left(X^n e^{-X} \right)^{(n)} e^X$.

2. Montrer que la famille $\left(H_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de H_n.

3. Montrer que la famille $\left(H_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de E.

4. En déduire une base orthonormée de E.

Exercice 17

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour P et Q polynômes donnés, on pose :

$$\Phi(P, Q) = \int_0^1 f(t) P(t) Q(t) \, dt.$$

1. Montrer que $\Phi(P, Q) = \int_0^1 f(t) P(t) Q(t) \, dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une unique base orthonormale $\left(P_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n soit de degré n et de coefficient dominant strictement positif.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n possède n racines réelles simples.

Exercice 28

Soit $E = C^0\left([-1, 1], \mathbb{R} \right)$, muni du produit scalaire défini par : $\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$.

Soient $F_- = \left\{ f \in E, \ \forall x \in [0, 1], \ f(x) = 0 \right\}$ et $F_+ = \left\{ f \in E, \ \forall x \in [-1, 0], \ f(x) = 0 \right\}$.

1. Montrer que $F_- = F_+{}^{\perp}$ et que $F_- = F_+{}^{\perp}$.

2. Les sous – espaces F_+ et F_- sont – ils supplémentaires dans E ?

Exercice 19

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel. Soit $M = \max_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\|$.

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \left\| x_k \right\|^2 \leq n M$.

Exercice 20 (pour 5/2)

Formule de Parseval

Soit $\left(a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale d'un espace préhilbertien E. Soit $H = \operatorname{Vect}\left(\left(a_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$.

On suppose que H est dense dans E, c'est – à – dire que tout point de E est adhérent à H.

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle a_n \mid x \rangle^2$.

Exercice 21

On munit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t$.

Soient $F = \{ f \in E,\ f(0) = f(1) = 0 \}$, et $G = \{ f \in E,\ f \text{ est } C^2 \text{ et } f'' = f \}$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E.

2. Exprimer la projection orthogonale sur G.

3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $A = \{ f \in E,\ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta \}$. Trouver $\inf_{f \in A} \left(\int_0^1 \left[(f(t))^2 + (f'(t))^2 \right] \mathrm{d}t \right)$.

Exercice 22

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit du produit scalaire usuel. J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \| M - aI - bJ \|$.

2. Soit H le sous – espace vectoriel de E formé des matrices de trace nulle. Déterminer $d(J, H)$.

Exercice 23

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p, et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est supposé muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \,.\, \mid \,.\, \rangle$, et $\| \,.\, \|$ désigne la norme associée.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\| A X_0 - B \| = \min \{ \| A X - B \|,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}.$$

2. Montrer que l'équation matricielle (d'inconnue X) : ${}^t A A X = {}^t A B$ admet une unique solution, que l'on comparera à X_0.

3. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (x + y - 2)^2 + z^2$.

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$, et le déterminer.